

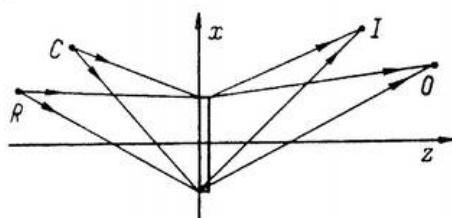
УДК 535.317.1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЛСТЫХ ГОЛОГРАММ

Михайлов И. А.

Из закона Брэгга получены выражения, позволяющие определить при заданной геометрии восстановления толстой голограммы геометрию ее записи, обеспечивающую максимальную дифракционную эффективность. Рассмотрены случаи пропускающей и отражающей голограмм. Анализ проведен с учетом возможного изменения толщины и показателя преломления регистрирующей среды, а также длины волны света на стадиях записи и восстановления.

Геометрическому анализу тонких голограмм было посвящено много работ, наиболее полно этот вопрос рассмотрен в [1]. Обобщение анализа на непараксиальную область дано в [2]. В этих работах были получены соотношения, связывающие координаты точечных источников на стадиях записи и восстановления голограммы, а также рассмотрены aberrационные свойства. Когда геометрия источников на одной из стадий, например восстановления, задана, геомет-



Геометрия записи и восстановления пропускающей голограммы.

рия записывающих источников может быть выбрана для тонкой голограммы в известной степени произвольно, так как 6 координат источников связаны тремя уравнениями.

При регистрации толстых голограмм необходимо учитывать закон Брэгга, накладывающий дополнительные ограничения на геометрию записывающих источников, если геометрия восстановления задана. Геометрия записи и восстановления толстых голограмм рассматривалась [3-5], однако анализ при этом ограничивался частным случаем коллимированных пучков. Более детальные исследования толстых голограмм проведены в [6], в которой рассмотрена расстройка Брэгга при определенных угловых и радиальных смещениях восстанавливающего источника, а также при изменении длины волны света. Однако результаты [6] не позволяют рассчитать геометрию записи, обеспечивающую максимальную дифракционную эффективность голограммы при произвольной заданной геометрии ее восстановления в условиях возможного изменения длины волны света, толщины и показателя преломления регистрирующей среды. Решению этой задачи посвящена данная работа.

Для получения максимальной дифракционной эффективности толстой голограммы объемная интерференционная структура, создаваемая в среде восстанавливающими источниками, должна совпадать со структурой голограммы, т. е. должен выполняться закон Брэгга. Как будет показано ниже, из закона Брэгга вытекают известные соотношения для тонких голограмм, полученные в [2], а также дополнительные соотношения, которые при заданной геометрии восстановления голограммы полностью определяют геометрию ее записи.

Пропускающие голограммы

Пусть голограмма расположена в плоскости xy (рисунок) и R, O, C и I — соответственно опорный, объектный, восстановливающий и восстановленный точечные источники. В случае пропускающей голограммы z -компоненты волновых векторов света источников R и O (и соответственно C и I) имеют одинаковый знак: для определенности примем, что z -компоненты всех волновых векторов положительны, т. е. свет распространяется слева направо, как показано на рисунке.

На стадии записи голограммы регистрируется объемная решетка, волновой вектор которой

$$\rho = \mathbf{k}'_R - \mathbf{k}'_0, \quad (1)$$

где \mathbf{k}'_c и \mathbf{k}'_0 — волновые векторы опорного и объектного пучков в среде.

На стадии восстановления пучки света должны удовлетворять закону Брэгга, т. е. соотношению, аналогичному (1),

$$\rho' = \mathbf{k}'_C - \mathbf{k}'_I, \quad (2)$$

где \mathbf{k}'_c и \mathbf{k}'_I — волновые векторы восстановливающего и восстановленного пучков света в среде, ρ' — волновой вектор решетки на стадии восстановления.

При усадке (изменении толщины) регистрирующей среды происходит растяжение объемной решетки в z -направлении в $T = t_c/t_r$ раз, где t_r и t_c соответственно толщина среды на стадиях записи и восстановления.

Согласно известному свойству преобразования Фурье, x - и y -компоненты волнового вектора решетки при этом не изменяются, а z -компонента увеличивается в $1/T$ раз, поэтому компоненты волновых векторов связаны следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} k'_{Cx} - k'_{Ix} &= k'_{Rx} - k'_{0x}, \\ k'_{Cy} - k'_{Iy} &= k'_{Ry} - k'_{0y}, \\ k'_{Cz} - k'_{Iz} &= \frac{1}{T} (k'_{Rz} - k'_{0z}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Используя выражение для волновых векторов света в воздухе в точке голограммы с координатами $x, y, z=0$

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \frac{(x_i - x)\mathbf{i} + (y_i - y)\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z_i^2}}, \quad (4)$$

нетрудно получить с помощью закона преломления [7] выражение для волновых векторов в среде

$$\mathbf{k}'_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \frac{(x_i - x)\mathbf{i} + (y_i - y)\mathbf{j} + \sqrt{n_i^2[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z_i^2]} - (x_i - x)^2 - (y_i - y)^2}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z_i^2}} \mathbf{k}, \quad (5)$$

где $i=R, O, C, I$, x_i, y_i, z_i — координаты i -го точечного источника; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z ; n_i и λ_i — показатель преломления среды и длина волны света в воздухе, равные n_R, λ_R на стадии записи и n_C, λ_C на стадии восстановления. В формулах (4) и (5) знаки квадратных корней выбираются равными знаку z_i , так как мы приняли, что z -компоненты волновых векторов положительны.

Рассмотрим вначале частный случай, когда все источники R, O, C, I удалены в бесконечность (коллимированные пучки) и расположены в плоскости xz . Подставляя выражения (5) в уравнения (3) и полагая $x=y=0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{x'_C}{R_C} - \frac{x_I}{R_I} &= \mu \left(\frac{x_R}{R_R} - \frac{x_O}{R_O} \right), \\ \sqrt{n_O^2 - \frac{x_O^2}{R_O^2}} - \sqrt{n_C^2 - \frac{x_C^2}{R_C^2}} &= \frac{\mu}{T} \left(\sqrt{n_R^2 - \frac{x_R^2}{R_R^2}} - \sqrt{n_C^2 - \frac{x_C^2}{R_C^2}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mu = \lambda_C / \lambda_R$; $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ — расстояние от i -го источника до центра голограммы. Знак R_i выбирается равным знаку z_i . Решение системы уравнений (6) при заданных углах падения пучков на стадии восстановления имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \alpha_R &= A + B \sqrt{\frac{n_R^2}{A^2 + B^2} - 1}, \quad \sin \alpha_0 = -A + B \sqrt{\frac{n_R^2}{A^2 + B^2} - 1}, \\ A &= \frac{1}{2\mu} (\sin \alpha_C - \sin \alpha_I), \quad B = \frac{T}{2\mu} (\sqrt{n_C^2 - \sin^2 \alpha_C} - \sqrt{n_I^2 - \sin^2 \alpha_I}), \\ \sin \alpha_i &= \frac{x_i}{R_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

что соответствует при $n_C = n_R$ решению, полученному в [5].

В общем случае из выражения (5) и уравнений (3) следует, что координаты источников R и O зависят не только от C и I , но и от координат точки голограммы x, y , поэтому будем искать положения источников R и O , удовлетворяющих закону Брэгга приближенно в центральной области голограммы. Применим для этого способ, аналогичный использованному в [2], а именно разложим выражение (5) в ряд по степеням $(x_i - x)/R_i, (y_i - y)/R_i$ и сохраним члены не выше второй степени

$$\mathbf{k}'_i \approx \frac{2\pi}{\lambda_i} \left\{ \frac{x_i - x}{R_i} \mathbf{i} + \frac{y_i - y}{R_i} \mathbf{j} + \left[n_i - \frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{2n_i R_i^2} \right] \mathbf{k} \right\}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в уравнения (3) и приравнивая члены при x, y и $(x^2 + y^2)$, получим из первых двух уравнений (3) известные соотношения между координатами источников [2]

$$\begin{aligned} \frac{x_C}{R_C} - \frac{x_I}{R_I} &= \mu \left(\frac{x_R}{R_R} - \frac{x_0}{R_0} \right), \quad \frac{y_C}{R_C} - \frac{y_I}{R_I} = \mu \left(\frac{y_R}{R_R} - \frac{y_0}{R_0} \right), \\ \frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_I} &= \mu \left(\frac{1}{R_R} - \frac{1}{R_0} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

а из третьего уравнения (3) дополнительные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_C}{R_C^2} - \frac{x_I}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{x_R}{R_R^2} - \frac{x_0}{R_0^2} \right), \\ \frac{y_C}{R_C^2} - \frac{y_I}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{y_R}{R_R^2} - \frac{y_0}{R_0^2} \right), \\ \frac{1}{R_C^2} - \frac{1}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{1}{R_R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right), \\ \frac{x_C^2 + y_C^2}{R_C^2} - \frac{x_I^2 + y_I^2}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{x_R^2 + y_R^2}{R_R^2} - \frac{x_0^2 + y_0^2}{R_0^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $N = n_C/n_R$.

Решая уравнения (9) и (10) совместно, получим при заданной геометрии восстановления искомые выражения для координат записывающих источников, удовлетворяющих закону Брэгга

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_R}{R_R} &= a \frac{x_C}{R_C} + b \frac{x_I}{R_I}, \quad \frac{x_0}{R_0} = b \frac{x_C}{R_C} + a \frac{x_I}{R_I}, \\ \frac{y_R}{R_R} &= a \frac{y_C}{R_C} + b \frac{y_I}{R_I}, \quad \frac{y_0}{R_0} = b \frac{y_C}{R_C} + a \frac{y_I}{R_I}, \\ \frac{1}{R_R} &= \frac{a}{R_C} + \frac{b}{R_I}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{b}{R_C} + \frac{a}{R_I}, \\ a &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu T}{N} + 1 \right), \quad b = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu T}{N} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, при $\mu = T = N = 1$ записывающие пучки совпадают с пучками на стадии восстановления. Отметим, что в случае пропускающих

голограмм на длину волны света, усадку и показатель преломления среды (величины μ , T и N) никаких дополнительных ограничений не налагается за исключением очевидных условий $(x_R^2 + y_R^2)/R_R^2 < 1$, $(x_0^2 + y_0^2)/R_0^2 < 1$.

Расчеты, проведенные для частного случая коллимированных пучков в плоскости xz , показывают, что значения углов записывающих пучков, рассчитанные по приближенным формулам (11), с достаточно высокой степенью точности совпадают с соответствующими значениями, рассчитанными по точным формулам (7). Приближенные (11) и точные формулы (7) совпадают при $T=1$, $N=\mu$.

Приведем значения коэффициентов aberrаций третьего порядка пропускающих голограмм, параметры которых соответствуют формулам (11). Используя полученные в [2] выражения для коэффициентов сферической aberrации S , комы C_x и астигматизма A_x и подставляя в них формулы (11), получим

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{R_C^3} - \frac{1}{R_I^3} - \mu \left(\frac{1}{R_R^3} - \frac{1}{R_0^3} \right) = \left(\frac{1}{R_C^3} - \frac{1}{R_I^3} \right) \left(1 - \frac{T^2}{N^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{\mu^2 T^2}{N^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_I} \right)^3, \\ C_x &= \frac{x_C}{R_C^3} - \frac{x_I}{R_I^3} - \mu \left(\frac{x_R}{R_R^3} - \frac{x_0}{R_0^3} \right) = \left(\frac{x_C}{R_C^3} - \frac{x_I}{R_I^3} \right) \left(1 - \frac{T^2}{N^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{\mu^2 T^2}{N^2} - 1 \right) \left(\frac{x_C}{R_C} - \frac{x_I}{R_I} \right) \left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_I} \right)^2, \\ A_x &= \frac{x_C^2}{R_C^3} - \frac{x_I^2}{R_I^3} - \mu \left(\frac{x_R^2}{R_R^3} - \frac{x_0^2}{R_0^3} \right) = \left(\frac{x_C^2}{R_C^3} - \frac{x_I^2}{R_I^3} \right) \left(1 - \frac{T^2}{N^2} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{\mu^2 T^2}{N^2} - 1 \right) \left(\frac{x_C}{R_C} - \frac{x_I}{R_I} \right)^2 \left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_I} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Аналогично записываются коэффициенты C_y , A_y , A_{xy} .

Отражающие голограммы

В этом случае направление распространения света источников O и I противоположно показанному на рисунке. Будем считать, что толщиной голограммы можно пренебречь по сравнению с расстояниями R_i . Тогда волновые векторы k'_0 и k'_I равны по величине и противоположны по знаку соответствующим векторам в случае пропускающих голограмм. Рассуждения проводятся аналогичным образом.

Получим вначале опять точное решение для частного случая коллимированных пучков в плоскости xz . Вместо уравнений (6) имеем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_C}{R_C} + \frac{x_I}{R_I} &= \mu \left(\frac{x_R}{R_R} + \frac{x_0}{R_0} \right), \\ \sqrt{n_C^2 - \frac{x_C^2}{R_C^2}} + \sqrt{n_I^2 - \frac{x_I^2}{R_I^2}} &= \frac{\mu}{T} \left(\sqrt{n_R^2 - \frac{x_R^2}{R_R^2}} + \sqrt{n_0^2 - \frac{x_0^2}{R_0^2}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \sin \alpha_R &= C + D \sqrt{\frac{n_R^2}{C^2 + D^2} - 1}, \quad \sin \alpha_0 = C - D \sqrt{\frac{n_0^2}{C^2 + D^2} - 1}, \\ C &= \frac{1}{2\mu} (\sin \alpha_C + \sin \alpha_I), \quad D = \frac{T}{2\mu} (\sqrt{n_C^2 - \sin^2 \alpha_C} + \sqrt{n_I^2 - \sin^2 \alpha_I}). \end{aligned} \quad (14)$$

В общем случае, используя разложение (8), вместо уравнений (9) получим

$$\begin{aligned} \frac{x_C}{R_C} + \frac{x_I}{R_I} &= \mu \left(\frac{x_R}{R_R} + \frac{x_0}{R_0} \right), \quad \frac{y_C}{R_C} + \frac{y_I}{R_I} = \mu \left(\frac{y_R}{R_R} + \frac{y_0}{R_0} \right), \\ \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_I} &= \mu \left(\frac{1}{R_R} + \frac{1}{R_0} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В отличие от пропускающих голограмм при подстановке разложения (8) в третье уравнение (3) нулевые члены n_i не исчезают, поэтому, пренебрегая вторыми членами, имеем

$$TN = \mu. \quad (16)$$

Следовательно, в первом приближении дополнительное ограничение налагается на характеристики среды, а не на координаты источников. Этот результат является выражением известного факта, что отражающие голограммы имеют слабую чувствительность к положению восстанавливающего источника и сильную зависимость длины волны света восстановленного изображения от характеристик среды.

Исследуем ограничения, вытекающие при учете вторых членов. Это дает уравнения, аналогичные уравнениям (10),

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_C}{R_C^2} + \frac{x_I^2}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{x_R}{R_R^2} + \frac{x_O^2}{R_O^2} \right), \\ \frac{y_C}{R_C^2} + \frac{y_I^2}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{y_R}{R_R^2} + \frac{y_O^2}{R_O^2} \right), \\ \frac{1}{R_C^2} + \frac{1}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{1}{R_R^2} + \frac{1}{R_O^2} \right), \\ \frac{x_C^2 + y_C^2}{R_C^2} + \frac{x_I^2 + y_I^2}{R_I^2} &= \frac{\mu N}{T} \left(\frac{x_R^2 + y_R^2}{R_R^2} + \frac{x_O^2 + y_O^2}{R_O^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Решая уравнения (15) и (17) совместно, получим соотношение

$$\mu T = N, \quad (18)$$

которое с учетом (16) определяет параметры T и N

$$T = 1, \quad N = \mu. \quad (19)$$

Значения координат записывающих источников при этом равны

$$\left. \begin{aligned} R_R &= \mu R_C, & R_O &= \mu R_I, \\ \frac{x_R^2}{R_R^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{x_C^2}{R_C^2}, & \frac{x_O^2}{R_O^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{x_I^2}{R_I^2}, \\ \frac{y_R}{R_R} &= \frac{1}{\mu} \frac{y_C}{R_C}, & \frac{y_O}{R_O} &= \frac{1}{\mu} \frac{y_I}{R_I}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из формул (20) видно, что координаты x и y источников R и O совпадают с соответствующими координатами источников C и I .

Таким образом, при заданных условиях восстановления отражающей голограммы закон Брэгга определяет не только геометрию записывающих пучков, но и характеристики регистрирующей среды. Оптимальным является решение, когда усадка среды отсутствует, а изменение длины волны света восстановленного изображения достигается за счет изменения показателя преломления среды.

Отметим, что формулы (20) для углов записывающих пучков являются точными. Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (19) точные формулы (14) совпадают с соответствующими формулами (20).

Приведем коэффициенты aberrаций третьего порядка отражающей голограммы, параметры которой соответствуют формулам (19) и (20). Коэффициенты сферической aberrации S , комы C_x и астигматизма A_x равны

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{R_C^3} + \frac{1}{R_I^3} - \mu \left(\frac{1}{R_R^3} + \frac{1}{R_O^3} \right) = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \left(\frac{1}{R_C^3} + \frac{1}{R_I^3} \right), \\ C_x &= \frac{x_C}{R_C^3} + \frac{x_I}{R_I^3} - \mu \left(\frac{x_R}{R_R^3} + \frac{x_O}{R_O^3} \right) = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \left(\frac{x_C^2}{R_C^3} + \frac{x_I^2}{R_I^3} \right), \\ A_x &= \frac{x_C^2}{R_C^3} + \frac{x_I^2}{R_I^3} - \mu \left(\frac{x_R^2}{R_R^3} + \frac{x_O^2}{R_O^3} \right) = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \left(\frac{x_C^2}{R_C^3} + \frac{x_I^2}{R_I^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Коэффициенты C_y , A_y и A_{xy} записываются аналогично.

В результате проведенного анализа толстых голограмм из закона Брэгга получены выражения, позволяющие определить как угловые, так и радиальные координаты записывающих источников, обеспечивающие максимальную дифракционную эффективность голограммы при заданном положении восстанавливающих источников. Очевидно, что полученные выражения позволяют также рассчитать геометрию восстановления при заданной геометрии записи голограммы. В этом случае все величины, относящиеся к стадии записи, заменяются на соответствующие величины стадии восстановления и наоборот.

В случае пропускающей голограммы на толщину и показатель преломления регистрирующей среды дополнительных ограничений не налагается. В случае отражающей голограммы эти характеристики среды должны иметь определенные значения.

Полученные выражения могут быть использованы для оптимизации схем записи и восстановления толстых голограмм и в первую очередь голографических оптических элементов.

Литература

- [1] Meier R. W. — JOSA, 1965, v. 55, N 8, p. 987—992.
- [2] Champagne E. B. — JOSA, 1967, v. 57, N 1, p. 51—55.
- [3] Vilkomerson D. H. R., Bostwick D. — Appl. Opt., 1967, v. 6, N 7, p. 1270—1227.
- [4] Stetson K. A. — Optik, 1969, B. 29, N. 5, S. 520—536.
- [5] Утамышев И. Р., Макеев В. А., Джугели Б. П., Аджалов В. И. — В кн.: Регистрирующие среды для изобразительной голографии и киноголографии. Л., 1979, с. 58—77.
- [6] Якимович А. П. — Опт. и спектр., 1979, т. 47, в. 5, с. 960—967.
- [7] Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М., 1962. 488 с.

Поступило в Редакцию 10 января 1983 г.