

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА ОБЪЕМНЫХ
ГОЛОГРАММАХ

Отклик элементарной объемной голограммы при ее освещении когерентным излучением можно рассматривать с точки зрения теории связанных волн. Однако, прежде чем применить эту теорию, воспользуемся пространственно-частотными представлениями, введенными в гл. 5, чтобы понять, как образуется элементарная объемная голограмма, и вывести аналитические выражения, описывающие ее дифракционную периодическую структуру.

§ 1. Голограмма, образованная двумя плоскими волнами

Рассмотрим две плоские волны единичной амплитуды, распространяющиеся в плоскости yz . Проникая в регистрирующую среду, они интерферируют (фиг. 9.1). Согласно закону Снеллиуса,

$$\frac{\sin \Omega_S}{\sin \psi_S} = \frac{\sin \Omega_R}{\sin \psi_R} = n, \quad (9.1)$$

где n — показатель преломления регистрирующей среды. Здесь Ω_S и Ω_R — углы между направлениями распространения волн и осью z в воздухе, а ψ_S и ψ_R — соответствующие углы в регистрирующей среде. Как и в гл. 3, § 1, мы начнем со сложения комплексных амплитуд плоских волн в среде и затем, чтобы найти интенсивность, умножим результирующую комплексную амплитуду на комплексно-сопряженную ей величину. В результате получаем следующее выражение для комплексной амплитуды в среде:

$$a(y, z) = \exp[-i2\pi(\eta_S y + \zeta_S z)] + \exp[-i2\pi(\eta_R y + \zeta_R z)]$$

и

$$aa^* = I = 2 + 2 \cos 2\pi[(\eta_S - \eta_R)y + (\zeta_S - \zeta_R)z], \quad (9.2)$$

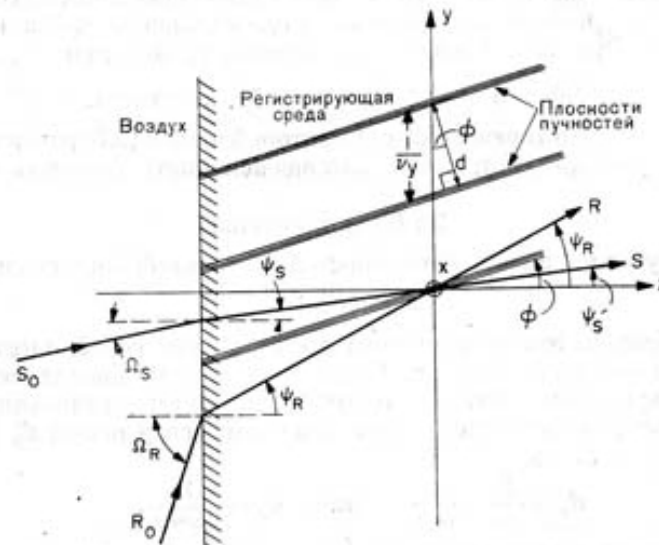
где

$$\eta_S = \frac{\sin \psi_S}{\lambda}, \quad \eta_R = \frac{\sin \psi_R}{\lambda} \quad [\text{из (5.146)}],$$

$$\zeta_S = \frac{(1 - \lambda^2 \eta_S^2)^{1/2}}{\lambda}, \quad \zeta_R = \frac{(1 - \lambda^2 \eta_R^2)^{1/2}}{\lambda} \quad [\text{из (5.16)}],$$

и λ — длина волны в среде.

Предположим сначала, что среда обладает фоточувствительностью только в одной плоскости $z = z_1 = \text{const}$. В этой плоскости второй член в аргументе косинуса в (9.2) $(\zeta_S - \zeta_R)z_1$ представляет собой постоянную добавку к фазе и его можно положить



ФИГ. 9.1.

Образование элементарной голограммы.

равным нулю. Оставшееся слагаемое соответствует фазовому члену, определяющему частоту интерференционных полос в направлении y :

$$v_y = \frac{1}{d_y} = \eta_S - \eta_R = \frac{\sin \psi_S - \sin \psi_R}{\lambda}, \quad (9.3)$$

где d_y — расстояние между соседними максимумами косинусоидального распределения интенсивности в интерференционных полосах в направлении оси y . Поскольку распределение интенсивности, описываемое формулой (9.2), не зависит от x , максимумы интенсивности полос располагаются на лежащих в плоскости $z = z_1$ линиях, параллельных оси x и находящихся на расстояниях d_y друг от друга. Формула (9.3) дает связь между d_y , длиной волны и направлениями волн в среде. Аналогичная формула справедлива и для соответствующих величин вне регистрирующей среды, т. е. в воздухе. Это нетрудно показать, используя закон Снеллиуса:

$$d_y = \frac{\lambda}{\sin \psi_S - \sin \psi_R} = \frac{\lambda_a/n}{(1/n)(\sin \Omega_S - \sin \Omega_R)} = \frac{\lambda_a}{\sin \Omega_S - \sin \Omega_R}, \quad (9.4)$$

где $\lambda_a = n\lambda$ — длина волны в воздухе.

и.e. $\zeta_S - \zeta_R = \frac{2 \sin \psi_S - 2 \sin \psi_R}{\lambda}$

Аналогичное выражение для d_y получается для объемной голограммы, если волновые векторы \vec{S} и \vec{R} составляют равные углы с нормалью к поверхности (фиг. 1.4). В этом случае $\psi_S = +\theta$, $\psi_R = -\theta$, $\eta_S = -\eta_R$, $\eta_S^2 = \eta_R^2$ и $\zeta_S - \zeta_R = 0$. В объемной среде интерференционная картина представляет собой совокупность поверхностей постоянной фазы косинусоидального члена в формуле (9.2). Эти поверхности описываются уравнением

$$2\pi (\eta_S - \eta_R) y + 2\pi (\zeta_S - \zeta_R) z = \text{const.} \quad (9.5)$$

В случае, соответствующем фиг. 1.4, второй член в (9.5) равен нулю, а $\eta_S - \eta_R = 2\eta_S$. Тогда для оставшейся части фазового члена получим

$$2\pi (2\eta_S) y = \text{const.}$$

В этом случае уравнение поверхностей постоянной фазы сводится к $y = \text{const.}$

Таким образом, эти поверхности представляют собой плоскости, параллельные плоскости xz . Расстояния между поверхностями, соответствующими максимальным значениям интенсивности (поверхностями пучностей), в направлении оси y равны d_y . Если $\psi_S = -\psi_R = \theta$, то

$$d_y = \frac{1}{\nu_y} = \frac{1}{2\eta_S}, \quad \text{или} \quad d_y = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}, \quad (9.6)$$

что совпадает с выражением (1.10). Поскольку плоскости пучностей параллельны оси z , то θ соответствует углам, которые каждая из интерферирующих плоских волн составляет с этими плоскостями в среде.

Возвращаясь к (9.5) и более общему выражению для поверхностей постоянной фазы, отметим, что уравнение (9.5) описывает плоскости, перпендикулярные плоскости yz [линии пересечения этих плоскостей с плоскостью yz представляют собой прямые линии, и в (9.5) отсутствует зависимость от x]. Угол ϕ между этими плоскостями и осью можно определить, дифференцируя (9.5) по z :

$$(\eta_S - \eta_R) \frac{dy}{dz} + (\zeta_S - \zeta_R) = 0$$

или

$$\text{tg } \phi = \frac{dy}{dz} = -\frac{\zeta_S - \zeta_R}{\eta_S - \eta_R}. \quad (9.7)$$

Воспользовавшись введенными ранее обозначениями для пространственных частот [см. (9.2)], получим

$$\begin{aligned} \text{tg } \phi &= -\frac{(1 - \sin^2 \psi_S)^{1/2} - (1 - \sin^2 \psi_R)^{1/2}}{\sin \psi_S - \sin \psi_R} = -\frac{\cos \psi_S - \cos \psi_R}{\sin \psi_S - \sin \psi_R} = \\ &= \text{tg} \left(\frac{\psi_S + \psi_R}{2} \right) \end{aligned}$$

или

$$\phi = \frac{\psi_S + \psi_R}{2}. \quad (9.8)$$

Как видно из фиг. 9.1 и формулы (9.8), поверхности пучностей элементарной голограммы делят пополам угол между волновыми векторами интерферирующих волн. Оси y и z на фиг. 9.1 можно, конечно, повернуть вокруг оси x на угол ϕ так, чтобы ось z совпала с плоскостью пучностей. Если теперь обозначить через θ угол, который каждый из пучков составляет с плоскостью пучностей в среде, то соотношение (1.10) будет справедливо независимо от ориентации пучков относительно нормали к голограмме, т. е.

$$2d \sin \theta = \lambda.$$

Из фиг. 9.1 видно также, что расстояние между соседними плоскостями пучностей определяется соотношением

$$d = d_y \cos \phi = \frac{\cos \phi}{\eta_S - \eta_R}. \quad \text{где } \text{tg } \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad (9.9)$$

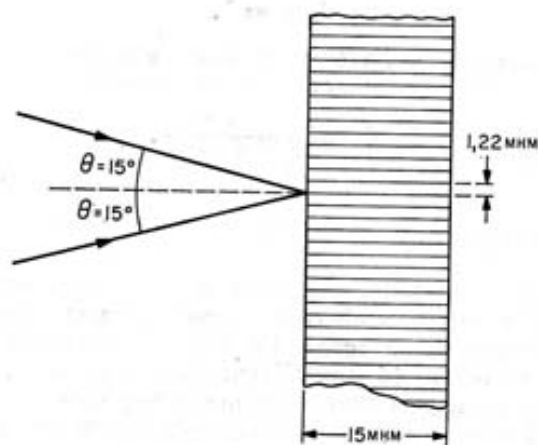
§ 2. Закон Брэгга

На фиг. 9.2 в соответствующем масштабе представлено поперечное сечение элементарной голограммы, образованной в объемной светочувствительной среде. Обычно толщина эмульсионного слоя составляет около 15 мкм. Горизонтальные линии представляют собой следы пересечения плоскости чертежа с плоскостями максимальной плотности серебра, которые соответствуют плоскостям пучностей интерференционной картины, существовавшей в эмульсии во время экспозиции. Предположим, что в воздухе углы между пучками при получении голограммы составляли 30° (фиг. 9.2) и длина волны $\lambda_0 = 0,633$ мкм. Подставляя эти значения в (9.4), получим, что постоянная решетки $d = 1,22$ мкм. Если такую решетку осветить исходным опорным пучком, то каждый луч до выхода из эмульсии пересечет по крайней мере три плоскости максимальной плотности. Было бы удивительно, если бы теория плоских голограмм, изложенная в гл. 8, описывала бы все свойства такой объемной голограммы. Кроме того, толщина 15 мкм относительно невелика, если сравнивать ее с толщиной других регистрирующих сред, например фотохромных кристаллов. Поэтому при рассмотрении дифракции на таких голограммах необходимо учитывать, что каждый луч последовательно рассеивается от большого числа периодически расположенных поверхностей максимумов плотности. Чтобы амплитуда результирующей дифрагированной волны была максимальной, волны, рассеянные последовательными слоями, должны быть синфазны. Для этого необхо-

димо, чтобы выполнялось определенное соотношение между длиной волны λ , углом θ , который составляет освещающий голограмму пучок с рассеивающими поверхностями, и расстоянием d между этими поверхностями. Это соотношение представляет собой закон Брэгга [см. (1.12)], который можно записать в виде

$$2d \sin \theta = \frac{\lambda_a}{n}. \quad (9.10)$$

Здесь λ_a — длина волны в воздухе; n — средний показатель преломления светочувствительной среды и θ — угол, который



ФИГ. 9.2.

Изображенная в масштабе интерференционная картина, зарегистрированная в эмульсии Кодак 649 F.

Угол между двумя пучками 30° , длина волны 6328 \AA , толщина эмульсии 15 мм .

освещающий и дифрагированный пучки составляют с рассеивающими слоями в светочувствительной среде. Закон Брэгга определяет угол падения, если длина волны и расстояние между слоями заданы. Если же угол падения и постоянная решетки выбираются независимо, то закон Брэгга определяет длину волны. Таким образом, объемные голограммы, свойства которых описываются законом Брэгга, являются селективными по отношению к освещаемому их излучению. В настоящей главе мы постараемся найти функциональную связь между амплитудой дифрагированной волны и углом падения (или длиной волны) восстанавливающего пучка. Мы также вычислим максимальную возможную величину дифрак-

ционной эффективности элементарной пропускающей или отражающей голограммы. Результаты этих расчетов существенным образом отличаются от полученных в гл. 8, § 5, результатов для элементарных плоских голограмм.

§ 3. Теория связанных волн

Большинство теоретических работ [9.1—9.6] хорошо описывают наблюдаемую угловую и спектральную селективность объемных голограмм. Однако в том случае, когда дифракционная эффективность голограммы высока, в теоретических расчетах обязательно нужно учитывать ослабление освещающей волны при прохождении через голограмму. Выполненные с помощью электронно-вычислительных машин расчеты для объемных голограмм [9.2, 9.3] показали, что такие голограммы могут обладать высокой дифракционной эффективностью; это предсказание было затем подтверждено экспериментально. Таким образом, линейная теория [9.1, 9.6] не объясняет всех свойств объемных голограмм. Наоборот, теория связанных волн не только предсказывает селективный отклик объемных голограмм, но также правильно описывает их высокую дифракционную эффективность. Согласно этой теории, в некоторых случаях дифракционная эффективность может приближаться к 100%, что соответствует почти полному гашению освещающей волны. При дальнейшем изложении в настоящей главе мы будем придерживаться теории, разработанной Когельником [9.4, 9.5]. Преимущество примененного им подхода состоит в том, что он позволяет получить как аналитические, так и численные результаты и применим к разным типам объемных голограмм (поглощающих и непоглощающих).

Здесь мы остановимся только на анализе голограмм, образованных двумя плоскими волнами, т. е. голограмм с синусоидальной записью. В гл. 1, § 6, мы уже приводили соображения, поясняющие, почему достаточно ограничиться рассмотрением синусоидальных голограмм. Дело в том, что произвольная функция пространственных координат, в данном случае голограмма, может быть разложена в ряд Фурье, т. е. представлена в виде суммы синусоидальных решеток, каждая из которых взаимодействует с падающим на нее светом в соответствии с предсказанием данной теории.

§ 4. Волновое уравнение

Рассмотрим объемную голограмму, схематически изображенную на фиг. 9.3. Границы голограммы обозначены вертикальными линиями $z = 0$ и $z = T$, параллельными оси y . Предположим, что

виде:

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \nabla^2 \vec{v}, \quad (9.16)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа. Прежде чем приравнять (9.15) и (9.16), покажем, что первый член в правой части (9.16) равен нулю. Рассмотрим для этого уравнение (9.12в)

$$\text{div } \vec{D} = \text{div} (\epsilon_0 \epsilon \vec{v}) = 0.$$

Это соотношение можно записать иначе с помощью другого векторного тождества (см. [9.7, 9.17*]), которое в нашем случае имеет вид

$$\text{div} (\epsilon_0 \epsilon \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{grad} (\epsilon_0 \epsilon) + \epsilon_0 \epsilon \text{div } \vec{v} = 0. \quad (9.17)$$

Поскольку вектор \vec{v} параллелен оси x , а изменение диэлектрической проницаемости происходит только в плоскости yz , то скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{v} \cdot \text{grad} (\epsilon_0 \epsilon) = 0 \quad (9.18)$$

и из (9.17) следует, что

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (9.19)$$

Комбинируя (9.19), (9.16) и (9.15), получаем

$$\nabla^2 \vec{v} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.20)$$

Теперь мы можем подставить в (9.20) выражения для \vec{v} , ϵ и σ , соответствующие нашему частному случаю. Так же, как и в гл. 5, § 1, мы можем записать вектор электрического поля \vec{v} , направленный параллельно оси x , в виде скалярной величины

$$v(y, z, t) = \text{Re} [a(y, z) \exp(i\omega t)], \quad (9.21)$$

которая не зависит от x и осциллирует с постоянной угловой частотой ω . Опустив, как и ранее, символ действительной величины $\text{Re} []$, решим уравнение (9.20) для комплексной величины $a(y, z)$. Подставляя (9.21) в (9.20), получаем

$$\nabla^2 a - i\omega\mu_0\sigma a + \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon a = 0. \quad (9.22)$$

Можно считать, что относительная диэлектрическая проницаемость ϵ складывается из среднего значения $\bar{\epsilon}$ и синусоидально изменяющейся компоненты, имеющей амплитуду ϵ_1 . Вектор, идущий из начала координат в любую точку среды, можно представить в виде $\vec{r} = ix + jy + kz$ (i , j и k — единичные векторы, направленные соответственно по осям x , y и z). Для принятого нами пространственного распределения диэлектрической прони-

цаемости поверхности $\epsilon = \text{const}$ представляют собой плоскости, уравнения которых по аналогии с (5.6) можно записать в виде

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \text{const},$$

где вектор \vec{n} — единичный вектор нормали к этим плоскостям, равный $\vec{K}/|\vec{K}|$. Величина ϵ в каждой из таких плоскостей определяется пространственной фазой $2\pi(\vec{r} \cdot \vec{n}/d) = \vec{K} \cdot \vec{r}$, где $\vec{r} \cdot \vec{n}$ представляет собой расстояние плоскости $\epsilon = \text{const}$ от начала координат и где d — измеренное вдоль направления нормали расстояние между плоскостями, соответствующее изменению фазы на 2π .

Все вышесказанное применимо и к проводимости σ , которая определяет поглощение; изменение этих величин в пространстве описывается следующими соотношениями:

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \epsilon_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r}, \quad (9.23)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r}. \quad (9.24)$$

Подставляя (9.23) и (9.24) в (9.22), получаем волновое уравнение

$$\nabla^2 a + q^2 a = 0, \quad (9.25)$$

где

$$q^2 = k^2 \bar{\epsilon} - i\omega\mu_0 \bar{\sigma} + (k^2 \epsilon_1 - i\omega\mu_0 \sigma_1) \cos \vec{K} \cdot \vec{r}. \quad (9.26)$$

В (9.26)

$$k = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_a},$$

где $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ — скорость света в вакууме (очень близкая к скорости света в воздухе) и λ_a — длина волны в воздухе. Чтобы упростить наши расчеты, запишем

$$q^2 = k(\bar{\epsilon})^{1/2} \left[k(\bar{\epsilon})^{1/2} - \frac{2i\omega\mu_0 \bar{\sigma}}{2k(\bar{\epsilon})^{1/2}} + 2 \left(\frac{k\epsilon_1}{2(\bar{\epsilon})^{1/2}} - \frac{i\omega\mu_0 \sigma_1}{2k(\bar{\epsilon})^{1/2}} \right) \cos \vec{K} \cdot \vec{r} \right] = \quad (9.27)$$

$$= \beta [\beta - 2i\alpha + 2\kappa \{ \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}) + \exp(-i\vec{K} \cdot \vec{r}) \}] = \quad (9.28)$$

$$= \beta^2 - 2i\alpha\beta + 2\kappa\beta \{ \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r}) + \exp(-i\vec{K} \cdot \vec{r}) \},$$

где

$$\beta = k(\bar{\epsilon})^{1/2}, \quad (9.29)$$

$$\alpha = \frac{\omega\mu_0 \bar{\sigma}}{2k(\bar{\epsilon})^{1/2}}, \quad (9.30)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(k \frac{\epsilon_1}{2(\bar{\epsilon})^{1/2}} - i \frac{\omega\mu_0 \sigma_1}{2k(\bar{\epsilon})^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} \left(k \frac{\epsilon_1}{2(\bar{\epsilon})^{1/2}} - i\alpha_1 \right) \quad (9.31)$$

и

$$\alpha_1 = \frac{\omega \mu_0 \sigma_1}{2k(\bar{\epsilon})^{1/2}}. \quad (9.32)$$

Как будет показано ниже, параметр взаимодействия κ имеет особое значение в теории связанных волн. Он описывает взаимодействие между падающей и дифрагированной волнами. Если $\kappa = 0$, то нет ни взаимодействия, ни дифракции.

Оптические свойства среды обычно принято характеризовать не значением диэлектрической проницаемости, а показателем преломления. Чтобы перейти к такому описанию, рассмотрим сначала распространение световой волны в *однородной* диэлектрической среде с большим затуханием. Решение волнового уравнения, соответствующее плоской волне, проходящей через среду в направлении z , имеет вид

$$f = A \exp(-\gamma_0 z),$$

где A — постоянная амплитуда и где комплексная постоянная γ_0 определяется соотношением

$$\gamma_0 = i(\bar{\epsilon}\epsilon_0\mu_0\omega^2 - i\mu_0\omega\sigma)^{1/2}$$

(см., например, [9.7]). (Заметим, что мы положили $\mu = 1$ и что в однородной среде ϵ_1 и σ_1 равны нулю.) Мы можем установить смысл величин β в (9.29) и α в (9.30), выразив γ_0 через эти параметры, что дает

$$\gamma_0 = i(\beta^2 - 2i\alpha\beta)^{1/2} \approx i\beta + \alpha.$$

Это справедливо при условии $\alpha \ll \beta$, которое в большинстве случаев выполняется. Тогда волновая функция в однородной среде принимает вид

$$f = A \exp(-i\beta z) \exp(-\alpha z),$$

где β — так называемая постоянная распространения, а α — коэффициент поглощения. Поскольку β и α определены через средние значения диэлектрической проницаемости и проводимости голограммы, то мы можем считать, что β и α представляют собой постоянную распространения и коэффициент поглощения в эквивалентной однородной среде, где $\epsilon = \bar{\epsilon}$ и $\sigma = \bar{\sigma}$. Это справедливо при условии $\alpha \ll \beta$.

Обозначим через \bar{n} *средний* показатель преломления голограммы и показатель преломления эквивалентной однородной среды. Напомним, что показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в среде. Поскольку при $\mu = 1$ последняя величина равна $(\bar{\epsilon}\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, то мы имеем

$$\bar{n} = \frac{(\bar{\epsilon}\epsilon_0\mu_0)^{1/2}}{(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}} = \bar{\epsilon}^{1/2}. \quad (9.33)$$

Подставляя это значение в (9.29), получаем

$$\beta = \frac{2\pi\bar{n}}{\lambda_a}. \quad (9.34)$$

Как видно из (9.34), ограничение $\alpha \ll \beta$ соответствует условию

$$\alpha \ll \frac{2\pi\bar{n}}{\lambda_a}. \quad (9.35)$$

Следует отметить, что множитель $\exp(-\alpha z)$ в волновой функции f при $\alpha > 0$ соответствует ослаблению. Предположим, что в результате регистрации амплитудной голограммы величина α оказалась промодулированной; однако при фотографической регистрации коэффициент поглощения не может стать отрицательным. Используя (9.30) и (9.31), равенство (9.24) можно выразить через α и амплитуду модуляции α_1 и показать, что, когда не выполнено условие $\alpha_1 \leq \alpha$, результирующее значение поглощения может оказаться отрицательным (при $\cos \vec{K} \cdot \vec{r} = -1$). Поэтому введем добавочное ограничение

$$\alpha_1 \ll \frac{2\pi\bar{n}}{\lambda_a}. \quad (9.36)$$

Аналогично (9.33) показатель преломления голограммы n представим в виде

$$n^2 = \bar{\epsilon}. \quad (9.37)$$

Выражая n через его среднее значение \bar{n} и амплитуду модуляции n_1 и используя (9.23), запишем

$$n^2 = (\bar{n} + n_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r})^2 = \bar{\epsilon} + \epsilon_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r}. \quad (9.38)$$

Допустим, что

$$n_1 \ll \bar{n}. \quad (9.39)$$

Тогда, возведя в квадрат $(\bar{n} + n_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r})$ в (9.38) и пренебрегая членом с n_1^2 , получим, что $\bar{n} = (\bar{\epsilon})^{1/2}$ [выражение, совпадающее с (9.33)] и

$$n_1 = \frac{\epsilon_1}{2\bar{n}} = \frac{\epsilon_1}{2(\bar{\epsilon})^{1/2}}. \quad (9.40)$$

Для объемных голограмм условие (9.39) обычно выполняется. Подставляя (9.40) в (9.34), постоянную взаимодействия κ можно представить в виде

$$\kappa = \frac{\pi n_1}{\lambda_a} = \frac{i\alpha_1}{2}. \quad (9.41)$$

§ 5. Решение волнового уравнения

Теперь мы должны решить уравнение в частных производных (9.25), т. е. волновое уравнение. Для этого введем некоторые упрощающие предположения. Во-первых, будем решать уравнение (9.25) только для углов падения, близких к тем, которые удовлетворяют закону Брэгга. Именно при таких углах наблюдается дифрагированная волна заметной интенсивности. Во-вторых, предположим, что в голограмме распространяются только две волны — падающая волна и волна, дифрагированная под углом, близким к брэгговскому. Последнее предположение определяет нижний предел толщины голограммы, для которого справедлива данная теория. Следствия, к которым приводит введение этих ограничений, будут рассмотрены в конце главы.

Комплексную амплитуду падающей волны в толще голограммы можно записать в виде

$$a_i = R(z) \exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{r}), \quad (9.42)$$

где $\vec{\rho}$ имеет направление распространения волны (фиг. 9.3). Здесь фазовый множитель $\exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{r})$ соответствует плоской падающей волне, распространяющейся в среде, в которой нет пространственных вариаций диэлектрической проницаемости и отсутствует поглощение. Из (5.7) и (5.14) и рассмотренной нами в § 4 настоящей главы теории распространения волн в однородной среде следует, что

$$\rho = |\vec{\rho}| = \beta, \quad (9.43)$$

где β дается формулой (9.34). Фазовый множитель $\exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{r})$ соответствует быстрым вариациям фазы, связанным с любой бегущей волной. С другой стороны, амплитудный множитель $R(z)$ учитывает медленные изменения фазы и амплитуды волны при ее прохождении через толщу голограммы (т. е. является функцией z). Эти изменения обуславливаются пространственными вариациями диэлектрической проницаемости и коэффициента поглощения.

Аналогично мы можем записать комплексную амплитуду дифрагированной на голограмме волны:

$$a_d = S(z) \exp(-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}), \quad (9.44)$$

где $\vec{\sigma}$ — вектор, показанный на фиг. 9.3. Если свет падает на голограмму под углом Брэгга, то особое значение приобретает векторное соотношение

$$\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{K} \quad (9.45)$$

между векторами распространения падающей и дифрагированной волн и вектором решетки \vec{K} . На фиг. 9.3 вверху справа приведена векторная диаграмма, графически представляющая равенство (9.45).

Если свет падает под углом Брэгга, то и вектор падающей волны $\vec{\rho}$ и вектор дифрагированной волны $\vec{\sigma}$ составляют с плоскостями пучностей синусоидальной голографической решетки угол θ_0 (угол Брэгга). Как было показано в предыдущем параграфе, вектор \vec{K} лежит в плоскости yz , перпендикулярной плоскостям пучностей. Поскольку вектор электрического поля падающей волны направлен по оси x , соответствующий волновой вектор (вектор распространения) $\vec{\rho}$ также должен лежать в плоскости yz . Как видно из (9.45), вектор $\vec{\sigma}$ лежит в той же плоскости. Треугольник, образованный тремя компланарными векторами, для случая, когда как $\vec{\rho}$, так и $\vec{\sigma}$ образуют угол θ_0 с рассеивающими плоскостями, показан в нижней правой части фиг. 9.3. Поскольку этот треугольник равнобедренный, $\rho = \sigma = \beta$, то

$$\frac{K}{2} = \rho \sin \theta_0. \quad (9.46)$$

Используя (9.11) и (9.34), получаем

$$\frac{\pi}{d} = \beta \sin \theta_0 = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \sin \theta_0. \quad (9.47)$$

Соотношение (9.47) можно также записать в виде

$$2d \sin \theta_0 = \frac{\lambda_0}{n} \quad (\text{закон Брэгга}).$$

Таким образом, (9.45) выражает закон Брэгга для света, падающего под углом Брэгга. *В векторной форме*

Вернемся теперь к проблеме решения волнового уравнения (9.25). Комплексную амплитуду a электрического поля в любой точке голограммы можно представить как сумму амплитуд падающей волны a_i и дифрагированной волны a_d :

$$a = a_i + a_d = R(z) \exp(-i\vec{\rho} \cdot \vec{r}) + S(z) \exp(-i\vec{\sigma} \cdot \vec{r}). \quad (9.48)$$

Подставим (9.48) в (9.25). При взятии частных производных используем следующие соотношения

$$\vec{\rho} \cdot \vec{r} = \rho_y y + \rho_z z, \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{r} = \sigma_y y + \sigma_z z; \quad (9.49)$$

$$\rho^2 = \rho_y^2 + \rho_z^2, \quad \sigma^2 = \sigma_y^2 + \sigma_z^2. \quad (9.50)$$

Члены, получающиеся после выполнения действий над a , указанных в (9.25), можно сгруппировать как коэффициенты либо при

$\exp(-i\vec{\rho}\cdot\vec{r})$, либо при $\exp(-i\vec{\sigma}\cdot\vec{r})$. При рассмотрении второго члена в (9.25), $\mathbf{q}^2\mathbf{a}$, членами с экспоненциальными множителями $\exp[-i(\vec{K} + \vec{\rho})\cdot\vec{r}]$ и $\exp[-i(\vec{\sigma} - \vec{K})\cdot\vec{r}]$ можно пренебречь, поскольку волны с векторами распространения $\vec{K} + \vec{\rho}$ или $\vec{\sigma} - \vec{K}$ не удовлетворяют векторному соотношению Брэгга (9.45). Чтобы одновременно выполнялось и уравнение (9.25), и соотношение (9.45) для произвольных \vec{K} , коэффициенты как при $\exp(-i\vec{\rho}\cdot\vec{r})$, так и при $\exp(-i\vec{\sigma}\cdot\vec{r})$ должны равняться нулю. Следовательно, должны выполняться два равенства:

$$\mathbf{R}'' - 2i\rho_z\mathbf{R}' - \rho^2\mathbf{R} + \beta^2\mathbf{R} - 2i\alpha\beta\mathbf{R} + 2\kappa\beta\mathbf{S} = 0, \quad (9.51)$$

$$\mathbf{S}'' - 2i\sigma_z\mathbf{S}' - \sigma^2\mathbf{S} + \beta^2\mathbf{S} - 2i\alpha\beta\mathbf{S} + 2\kappa\beta\mathbf{R} = 0. \quad (9.52)$$

Штрихи обозначают дифференцирование по z .

Сделав некоторые предположения и введя новые обозначения, можно упростить (9.51) и (9.52). Ранее уже было отмечено, что быстрые вариации волновых функций в (9.42) и (9.44) описываются фазовыми множителями, в то время как $\mathbf{R}(z)$ и $\mathbf{S}(z)$ меняются сравнительно медленно. Предположим теперь, что $\mathbf{R}(z)$ и $\mathbf{S}(z)$ меняются настолько медленно, что величинами \mathbf{R}'' и \mathbf{S}'' можно пренебречь. В дальнейшем мы проверим справедливость такого приближения. Уравнение (9.51) упрощается, если заметить, что сумма третьего и четвертого членов равна нулю [см. (9.43)]. Рассмотрим теперь сумму третьего и четвертого членов в (9.52), равную $\mathbf{S}(\beta^2 - \sigma^2)$, и оценим величину множителя $\beta^2 - \sigma^2$ для случая, когда угол падения θ отличается от угла Брэгга θ_0 только на малую величину δ , т. е.

$$\theta = \theta_0 + \delta. \quad (9.53)$$

Воспользовавшись выражением (9.45), можно написать

$$\begin{aligned} \beta^2 - \sigma^2 &= \beta^2 - (\vec{\rho} - \vec{K})^2 = \beta^2 - \rho^2 + 2\vec{\rho}\cdot\vec{K} - K^2 = \\ &= 2\rho K \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - K^2 = 2\rho K \sin\theta - K^2. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Угол между $\vec{\rho}$ и \vec{K} , равный $\pi/2 - \theta$, показан на фиг. 9.3. В соответствии с (9.53) $\sin\theta$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sin(\theta_0 + \delta) = \sin\theta_0 \cos\delta + \sin\delta \cos\theta_0 \approx \\ &\approx \sin\theta_0 + \delta \cos\theta_0 \approx \frac{K}{2\beta} + \delta \cos\theta_0, \end{aligned} \quad (9.55)$$

где мы положили $\sin\delta \approx \delta$, $\cos\delta \approx 1$ и использовали (9.46) и (9.43), чтобы показать, что

$$\sin\theta_0 = \frac{K}{2\beta}. \quad (9.56)$$

Подставляя (9.55) в (9.54), получаем

$$\begin{aligned} \beta^2 - \sigma^2 &\approx 2\rho K \left[\frac{K}{2\beta} + \delta \cos\theta_0 \right] - K^2 \approx \\ &\approx 2\rho K \delta \cos\theta_0 \approx \\ &\approx 2\rho (2\beta \sin\theta_0) \delta \cos\theta_0, \end{aligned} \quad (9.57)$$

$$\beta^2 - \sigma^2 \approx 2\beta^2 \delta \sin 2\theta_0. \quad (9.58)$$

Обозначим

$$\Gamma = \beta \delta \sin 2\theta_0, \quad \text{фактор отклонения от Брэгга} \quad (9.59)$$

так что

$$\beta^2 - \sigma^2 = 2\beta\Gamma. \quad (9.60)$$

Тогда, пренебрегая производными \mathbf{R}'' и \mathbf{S}'' , используя (9.60) и вводя обозначения

$$c_R = \frac{\rho_z}{\beta} = \frac{\rho \cos\psi}{\beta} = \cos\psi, \quad (9.61)$$

$$c_S = \frac{\sigma_z}{\beta},$$

мы можем преобразовать (9.51) и (9.52) к виду

$$c_R \mathbf{R}' + \alpha \mathbf{R} = -i\kappa \mathbf{S}, \quad (9.62)$$

$$c_S \mathbf{S}' + (\alpha + i\Gamma) \mathbf{S} = -i\kappa \mathbf{R}, \quad (9.63)$$

где $\mathbf{R}' = d\mathbf{R}/dz$ и $\mathbf{S}' = d\mathbf{S}/dz$.

Эти уравнения связанных волн позволяют понять физику процесса дифракции. Когда при распространении падающей и дифрагированной волн сквозь голограмму пройденное ими расстояние увеличивается на dz , комплексные амплитуды этих волн меняются на $d\mathbf{R}$ или $d\mathbf{S}$. Это изменение вызвано поглощением, которому соответствуют члены $\alpha\mathbf{R}$ и $\alpha\mathbf{S}$, или взаимодействием волн друг с другом, описываемым членами взаимодействия $\kappa\mathbf{S}$ и $\kappa\mathbf{R}$. Как мы увидим, член $i\Gamma\mathbf{S}$ в (9.63) соответствует добавочному фазовому множителю в дифрагированной волне. Если угол, под которым распространяется падающая волна, сильно отличается от угла Брэгга, то величина Γ будет большой. В результате накопления этой добавочной фазы дифрагированная волна выходит из синхронизма с падающей волной, что приводит к ослаблению взаимодействия.

Уравнения (9.62) и (9.63) представляют собой систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Подставляя (9.62) в (9.63), получаем для \mathbf{R} одно дифференциальное уравнение второго порядка

$$\mathbf{R}'' + \left(\frac{\alpha}{c_R} + \frac{\alpha}{c_S} + \frac{i\Gamma}{c_S} \right) \mathbf{R}' + \frac{(\alpha^2 + i\Gamma\alpha + \kappa^2)}{c_R c_S} \mathbf{R} = 0. \quad (9.64)$$

Решение этого дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ищем в виде

$$R(z) = \exp(\gamma z). \quad (9.65)$$

Подставляя (9.65) в (9.64), получаем квадратное уравнение для γ

$$\gamma^2 + \left(\frac{\alpha}{c_R} + \frac{\alpha}{c_S} + \frac{i\Gamma}{c_S} \right) \gamma + \frac{(\alpha^2 + i\Gamma\alpha + \kappa^2)}{c_R c_S} = 0, \quad (9.66)$$

решение которого имеет вид

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{c_R} + \frac{\alpha}{c_S} + \frac{i\Gamma}{c_S} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha}{c_R} - \frac{\alpha}{c_S} - \frac{i\Gamma}{c_S} \right)^2 - \frac{4\kappa^2}{c_R c_S} \right]^{1/2}, \quad (9.67)$$

где индекс 1 соответствует знаку плюс перед квадратным корнем, а 2 — знаку минус. Частными решениями уравнения (9.64) являются функции $\exp(\gamma_1 z)$ и $\exp(\gamma_2 z)$, а полное решение дается их линейной комбинацией

$$R(z) = R_1 \exp(\gamma_1 z) + R_2 \exp(\gamma_2 z), \quad (9.68)$$

где R_1 и R_2 — постоянные, которые можно вычислить, исходя из граничных условий. Подставляя (9.68) в (9.62), получаем аналогичное уравнение для $S(z)$:

$$S(z) = S_1 \exp(\gamma_1 z) + S_2 \exp(\gamma_2 z). \quad (9.69)$$

В двух следующих параграфах мы вычислим постоянные R_1 , R_2 , S_1 и S_2 для пропускающих и отражательных голограмм. При рассмотрении пропускающих голограмм предполагается, что решетка не наклонная, т. е. плоскости решетки перпендикулярны к поверхности объемной голограммы. При рассмотрении отражательных голограмм (фиг. 1.12, положение 4) предполагается, что плоскости решетки параллельны поверхности. Мы здесь остановимся только на диэлектрических решетках без потерь, или чисто фазовых решетках, для которых меняется показатель преломления и потери равны нулю, и чисто абсорбционных решетках, у которых меняется коэффициент поглощения, а показатель преломления постоянен. Решетки с наклонными слоями, фазовые решетки с потерями, а также смешанные амплитудно-фазовые решетки рассматриваются в работе Когельника [9.5].

Прежде чем продолжить обсуждение, заметим, что с помощью выражений (9.65) и (9.67) можно установить, действительно ли мы имели право пренебречь величиной R'' по сравнению с $\rho_2 R'$ в уравнении (9.51). Из (9.65) находим, что $R'' = \gamma^2 \exp(\gamma z)$, а из (9.61) получаем $\rho_2 R' = \gamma \beta \cos \psi \exp(\gamma z)$. Таким образом, для $\psi < 90^\circ$ условие $R'' \ll \rho_2 R'$ означает, что $\gamma \ll \beta$. Как видно из

(9.67), условие $\gamma \ll \beta$ выполняется, если величина Γ (пропорциональная $\delta\beta$) очень мала и если удовлетворяются неравенства (9.35), (9.36) и (9.39). Аналогичным образом можно показать, что при тех же условиях можно пренебречь производной S'' по сравнению с $\sigma_2 S'$.

§ 6. Пропускающие голограммы

Пусть слева на пропускающую голограмму падает освещающая волна (фиг. 9.4). Как освещающая, так и дифрагированная волны распространяются сквозь голограмму слева направо. Нормируем амплитуду падающей волны $R(z)$ так, чтобы $R(0) = 1$



ФИГ. 9.4.

Пропускающая голограмма.

при $z = 0$. Первоначально амплитуда дифрагированной волны равна нулю, так что $S(0) = 0$ при $z = 0$. Записав (9.68) и (9.69) для $z = 0$, получим граничные условия

$$R(0) = R_1 + R_2 = 1, \quad (9.70)$$

$$S(0) = S_1 + S_2 = 0. \quad (9.71)$$

Используя (9.70) и (9.71) и добавочное соотношение, которое следует из (9.69), а именно

$$S'(0) = \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2,$$

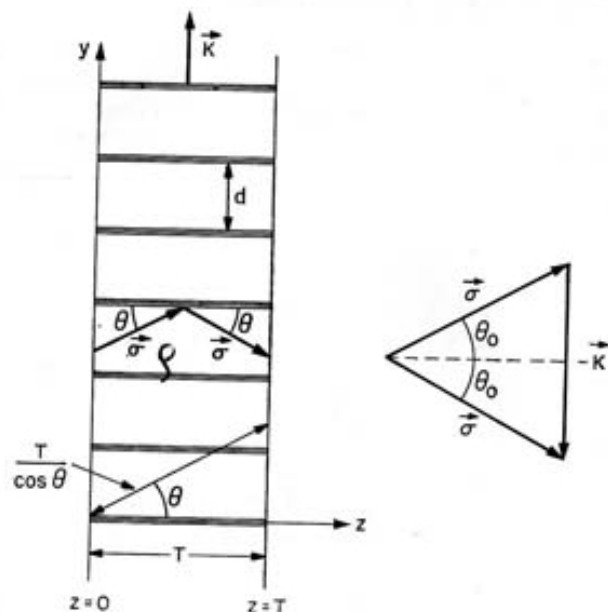
мы можем решить уравнение взаимодействия волн (9.63) для $S_1 = -S_2$; тогда для $z = 0$ получаем

$$c_S (\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2) = -i\kappa,$$

или

$$S_1 = -S_2 = -\frac{i\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (9.72)$$

При таких значениях S_1 и S_2 из (9.69) можно вычислить амплитуду дифрагированной волны на другой поверхности голограммы при



ФИГ. 9.5.

Геометрическая схема пропускающей голограммы с плоскостями пучностей, перпендикулярными поверхности голограммы.

$z = T$ (T — толщина голограммы). Это дает

$$S(T) = i \frac{\kappa}{c_S(\gamma_1 - \gamma_2)} [\exp(\gamma_2 T) - \exp(\gamma_1 T)]. \quad (9.73)$$

В соответствии с ранее намеченным планом ограничимся случаем, когда плоскости решетки ориентированы перпендикулярно поверхности голограммы и, следовательно, вектор решетки \vec{K} параллелен поверхности. На фиг. 9.5 приведены схема расположения векторов и векторный треугольник, соответствующий соотношению $\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{K}$, для брэгговского угла падения. Вектор падающей волны ρ образует угол θ с плоскостями решетки и такой же

угол $\psi = \theta$ с осью z . Если выполнено условие Брэгга, то $\theta = \theta_0$, треугольник становится равнобедренным и выполняется соотношение

$$c_R = \frac{\rho_z}{\beta} = c_S = \frac{\sigma_z}{\beta} = \cos \theta_0. \quad (9.74)$$

Мы будем считать, что равенство (9.74) справедливо для всех углов падения (близких к углу Брэгга), которые мы будем рассматривать.

1. Фазовые пропускающие голограммы

Теперь наша цель состоит в том, чтобы найти амплитуду $S(T)$ дифрагированной волны, исходящей из голограммы, для случая, когда $\alpha = \alpha_1 = 0$, т. е. для диэлектрической фазовой решетки без потерь. При выполнении вычислений удобно ввести параметры ξ и ν , определяемые соотношениями

$$\xi = \delta \beta T \sin \theta_0 = \frac{\Gamma T}{2 \cos \theta_0}, \quad (9.75)$$

$$\nu = \frac{\kappa T}{\cos \theta_0} = \frac{\pi n_1 T}{\lambda_a \cos \theta_0}. \quad (9.76)$$

Из (9.73) видно, что прежде всего нужно выразить через ξ и ν величины $(\gamma_1 - \gamma_2)$, $\gamma_1 T$ и $\gamma_2 T$. Из (9.67) имеем

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{2i}{T} (\xi^2 + \nu^2)^{1/2}, \quad (9.77)$$

$$\gamma_{1,2} T = -i\xi \pm i(\xi^2 + \nu^2)^{1/2}. \quad (9.78)$$

Подставляя (9.77) и (9.78) в (9.73), получаем

$$S(T) = -i \frac{\exp(-i\xi) \sin(\xi^2 + \nu^2)^{1/2}}{(1 + \xi^2/\nu^2)^{1/2}}. \quad (9.79)$$

Поскольку амплитуду падающей волны при $z = 0$ мы положили равной единице, эффективность голограммы составляет

$$\eta = \frac{|S(T)|^2}{|R(0)|^2} = |S(T)|^2.$$

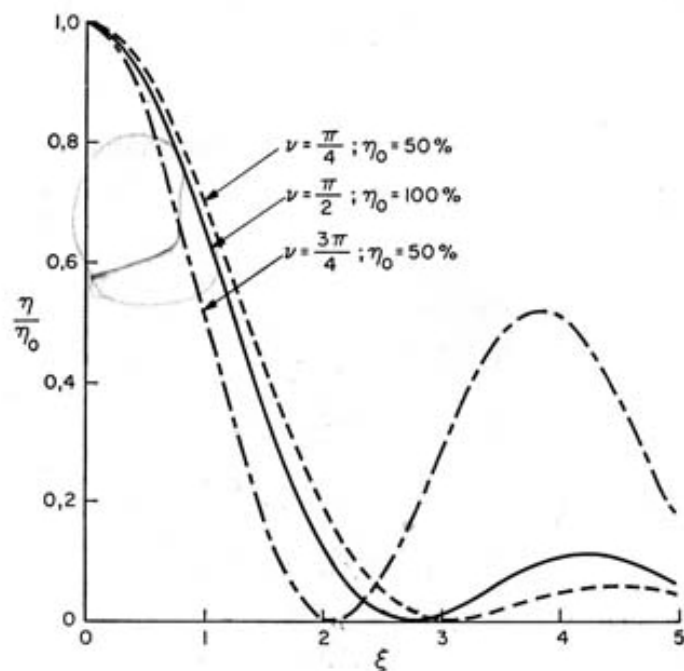
Сначала рассмотрим случай, когда свет падает под углом Брэгга, так что $\delta = 0$ и $\xi = 0$. Эффективность будет равна 100%, если $\sin \nu = 1$ или если

$$\nu = \frac{\pi n_1 T}{\lambda_a \cos \theta_0} = \frac{N\pi}{2}. \quad (9.80)$$

Соотношение (9.80) можно также записать в виде

$$\frac{n_1 T}{\cos \theta_0} = \frac{\lambda_a}{2} N. \quad (9.81)$$

Левая часть равенства (9.81) эквивалентна приращению оптического пути падающего луча, которое наблюдалось бы в том случае, если бы среднее изменение показателя преломления среды голограммы было равно n_1 (фиг. 9.5). Если эквивалентное изменение



ФИГ. 9.6.

Зависимость относительной эффективности η/η_0 диэлектрической пропускающей голограммы (без потерь) от $\xi = \delta (2\pi\bar{n}/\lambda_a) T \sin \theta_0$ для различных значений параметра $\nu = \pi n_1 T / \lambda_a \cos \theta_0$. (По Когельнику [9.5].)

длины пути равно половине длины волны падающего излучения (в воздухе), то эффективность становится равной 100%. Таким образом, если голограмма образуется в диэлектрической среде без потерь, то даже при небольших вариациях показателя преломления дифракционная эффективность может достигать 100% при условии, что толщина среды T достаточно велика, чтобы выполнялось равенство (9.81).

Если угол падения отличается от угла Брэгга, то получить 100%-ную дифракционную эффективность невозможно. На фиг. 9.6

представлены результаты расчетов, выполненных по формуле (9.79). По вертикальной оси отложена эффективность η , деленная на η_0 — эффективность, получаемую при падении освещающего пучка под углом Брэгга. По горизонтальной оси отложен параметр ξ , пропорциональный угловому отклонению δ от угла Брэгга. На фиг. 9.6 приведены три кривые, соответствующие трем значениям параметра ν . При постоянной толщине T и данной геометрии пучков, образующих голограмму, параметр ν пропорционален амплитуде вариаций показателя преломления, образующихся в результате экспонирования и обработки голограммы. Каждой из кривых на фиг. 9.6 соответствует своя максимальная величина эффективности η_0 , которая достигается при $\xi = 0$. Отметим, что при $\nu = \pi/2$ эффективность η_0 составляет 100%, тогда как при $\nu = \pi/4$ и $\nu = 3\pi/4$ она равна 50%. Фиг. 9.6 иллюстрирует зависимость эффективности голограммы от угла падения для трех значений модуляционного параметра ν .

В качестве практического примера использования изложенной здесь теории вычислим, при каком отклонении угла падения δ от угла Брэгга дифракционная эффективность падает до нуля. Предположим, что голограмма образована в хромированном желатине (см. гл. 10) в результате интерференции двух плоских волн, угол между направлениями распространения которых в воздухе равен 60° . Угол Брэгга в воздухе равен 30° , а в желатине $19,2^\circ$ (если считать, что показатель преломления желатина $\bar{n} = 1,52$). Пусть длина волны в воздухе $\lambda_a = 4880 \text{ \AA}$, толщина слоя $T = 15 \text{ мкм}$ и $\nu = \pi/2$, так что при падении света под углом Брэгга эффективность составляет 100%. Из (9.75) имеем

$$\xi = \frac{\delta 2\pi\bar{n}}{\lambda_a} T \sin \theta_0 = 96,58.$$

Поскольку кривая для $\nu = \pi/2$ на фиг. 9.6 падает до нуля при $\xi = 2,7$, имеем $\delta = 2,7/96,5 = 0,028 \text{ рад} = 1,6^\circ$ (внутри желатина). В воздухе $\delta = 2,45^\circ$.

Кривыми, изображенными на фиг. 9.6, можно пользоваться также, чтобы определить, как меняется дифракционная эффективность при отклонении длины волны от значения, удовлетворяющего закону Брэгга. Пусть голограмма образована двумя плоскими волнами с длиной волны λ_a , угол между которыми в регистрирующей среде с показателем преломления \bar{n} равен $2\theta_0$. При освещении плоской волной с длиной волны λ_a , удовлетворяющей закону Брэгга (9.10)

$$2\bar{n}d \sin \theta_0 = \lambda_a,$$

голограмма имеет максимальную эффективность. Пусть теперь длина волны, падающей на голограмму, стала равной $\lambda_a + \Delta\lambda$,

где $\Delta\lambda/\lambda_a \ll 1$. Максимальная эффективность теперь наблюдается при освещении не под углом θ_0 , а под новым углом Брэгга $\theta'_0 = \theta_0 + \delta$. Если мы по-прежнему будем освещать голограмму под исходным углом $\theta_0 = \theta'_0 - \delta$, то дифракционная эффективность уменьшится, поскольку теперь угол θ_0 отличается от брэгговского θ'_0 угла на $-\delta$ и соответственно параметр $\xi = -\delta\beta T \sin \theta_0$ имеет отрицательную величину. Кривые $\eta/\eta_0 = |S(T)|^2$ на фиг. 9.6 симметричны относительно $\xi(\delta)$ [см. (9.79)], так что, зная δ , мы можем определить уменьшение эффективности, соответствующее $\pm\xi$. Величину δ можно выразить через $\Delta\lambda$, введя в (9.10) новые брэгговские параметры $\theta_0 + \delta$ и $\lambda_a + \Delta\lambda$:

$$2\bar{n}d \sin(\theta_0 + \delta) = \lambda_a + \Delta\lambda. \quad (9.82)$$

Полагая $\sin \delta \approx \delta$ и $\cos \delta \approx 1$ и используя (9.10), получаем

$$\delta = \frac{\Delta\lambda}{2\bar{n}d \cos \theta_0}, \quad (9.83)$$

или

$$\delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_a} \operatorname{tg} \theta_0. \quad (9.84)$$

Для параметра ξ (при положительных $\Delta\lambda$) имеем

$$\xi = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_a} \operatorname{tg} \theta_0 \left(\frac{2\pi\bar{n}}{\lambda_a} \right) T \sin \theta_0. \quad (9.85)$$

Вычислим, при каком значении $\Delta\lambda$ эффективность голограммы в хромированном желатине падает до нуля (для ранее приведенного примера). Подставляя в (9.85) $\xi = 2,7$, $\bar{n} = 1,52$, $T = 15$ мкм, $\lambda_a = 0,488$ мкм и $\theta_0 = 19,2^\circ$, найдем, что $|\Delta\lambda| = 0,0393$ мкм = 393 \AA . [Для малых $\Delta\lambda$ изменением v можно пренебречь. Это становится очевидным, если продифференцировать (9.76) по λ и рассмотреть фиг. 9.6.]

С помощью кривых на фиг. 9.6 можно установить простое правило, определяющее чувствительность фазовых голограмм к изменению угла падения. Если $\xi \approx 3$, то дифракционная эффективность практически равна нулю (по крайней мере для $\pi/2 \gg v \gg \pi/4$). Воспользовавшись равенством (9.75), вычислим величину δ_0 , соответствующую $\xi = 3$:

$$\delta_0 = \frac{3}{\beta T \sin \theta_0} = \frac{3\lambda_a}{2\pi\bar{n}T \sin \theta_0} \approx \frac{\lambda_a}{2\pi T \sin \theta_0}. \quad (9.86)$$

Используя (9.10), получаем

$$\delta_0 \approx \frac{d}{T}. \quad (9.87)$$

Подставляя (9.87) в (9.84), приходим к приближенному соотношению для чувствительности к изменению длины волны:

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_a} \approx \frac{d \operatorname{ctg} \theta_0}{T}. \quad (9.88)$$

Здесь отклонение на $\Delta\lambda_0$ соответствует уменьшению эффективности до нуля.

2. Абсорбционные пропускающие голограммы

Если пропускание голограммы, изображенной на фиг. 9.5, характеризуется величиной $\epsilon_1 = 0$ и конечными значениями α и α_1 , то дифракция света на ней обусловлена только вариациями коэффициента поглощения. В дальнейшем рассмотрении можно продолжать пользоваться параметром ξ , который определяется соотношением (9.75), однако вместо параметра v удобнее ввести новый параметр v_a . Константа взаимодействия κ [см. (9.41)] дается теперь соотношением

$$\kappa = -\frac{i\alpha_1}{2}, \quad (9.89)$$

и v_a мы определим следующим образом:

$$v_a = \frac{\alpha_1 T}{2 \cos \theta_0}. \quad (9.90)$$

Снова, как и выше, мы должны вычислить $S(T)$ по формуле (9.73). Как и прежде, сначала нужно выразить $\Upsilon_1 - \Upsilon_2$ и $\Upsilon_{1,2} T$ через ξ и v_a . Из (9.67) имеем

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 - \Upsilon_2 &= \left[-\left(\frac{\Gamma}{c_S} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{c_S c_R} \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\alpha_1}{\cos \theta_0} \right)^2 - \left(\frac{\Gamma}{\cos \theta_0} \right)^2 \right]^{1/2} = \\ &= \frac{2}{T} (v_a^2 - \xi^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (9.91)$$

и

$$\Upsilon_{1,2} T = -\frac{\alpha T}{\cos \theta_0} - i\xi \pm (v_a^2 - \xi^2)^{1/2}. \quad (9.92)$$

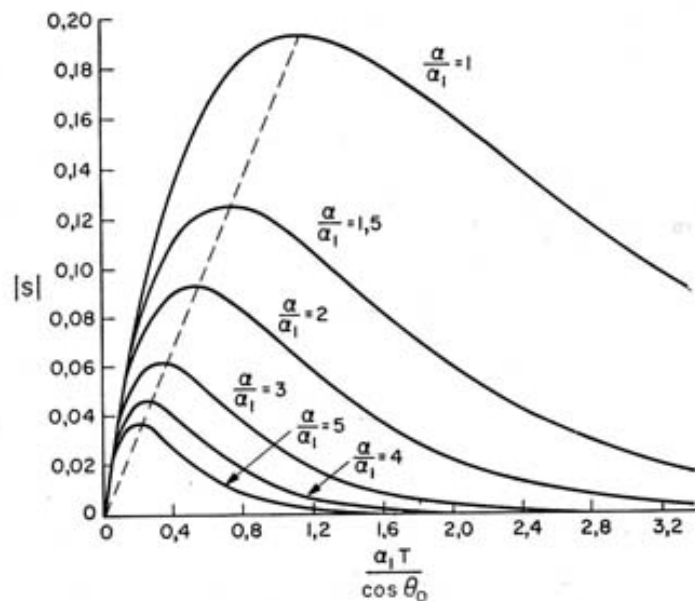
Подставляя эти значения в (9.73), получаем амплитуду $S(T)$ волны, дифрагированной на чисто абсорбционной пропускающей голограмме:

$$S(T) = -\exp\left(-\frac{\alpha T}{\cos \theta_0}\right) \exp(-i\xi) \frac{\operatorname{sh}(v_a^2 - \xi^2)^{1/2}}{(1 - \xi^2/v_a^2)^{1/2}}. \quad (9.93)$$

Для случая падения под углом Брэгга ($\xi = 0$) амплитуда дифрагированной волны принимает вид

$$S(T) = -\exp\left(-\frac{\alpha T}{\cos \theta_0}\right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 T}{2 \cos \theta_0} \quad (9.94)$$

На фиг. 9.7 абсолютные величины $S(T)$ представлены в зависимости от $\alpha_1 T / \cos \theta_0$ для различных значений отношения α / α_1 . Чтобы найти дифракционную эффективность (для падающей волны единичной амплитуды), нужно возвести в квадрат $|S(T)|$. При увеличении α_1 величина $|S(T)|$ возрастает. Поскольку мы исключаем здесь возможность усиления (или отрицательного поглоще-



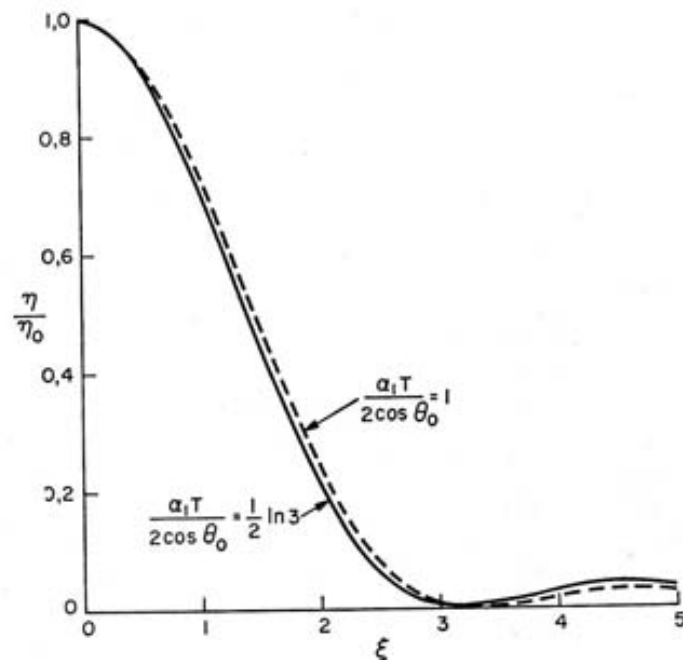
ФИГ. 9.7.

Зависимость абсолютной величины амплитуды дифрагированной волны от $\alpha_1 T / \cos \theta_0$ для абсорбционных (пропускающих) голограмм при различных значениях параметра α / α_1 . (По Когельнику [9.5].)

ния), при увеличении α_1 значение α также должно возрастать, чтобы выполнялось условие $\alpha \geq \alpha_1$. Как видно из (9.94), увеличение α приводит к уменьшению $|S(T)|$. Положим величину α_1 равной ее максимально возможному значению $\alpha_1 = \alpha$; подставим это значение в (9.94) и найдем максимум $|S(T)|$ по отношению к $\alpha_1 T / \cos \theta_0$. Максимальное значение амплитуды дифрагированной волны достигается при $\alpha_1 T / \cos \theta_0 = \ln 3$ и равно $|S(T)| = (3\sqrt{3})^{-1}$. Возводя в квадрат $|S(T)|_{\text{макс}}$, найдем максимальную

дифракционную эффективность $\eta_{\text{макс}} = 1/27 = 3,7\%$, что несколько больше половины максимальной дифракционной эффективности тонкой абсорбционной голограммы (см. гл. 8, § 5).

Интересно вычислить оптическую плотность абсорбционной голограммы, обладающей максимальной дифракционной эффективностью. Предположим, что средний коэффициент поглощения равен



ФИГ. 9.8.

Зависимость относительной эффективности η/η_0 абсорбционной пропускающей голограммы от $\xi = \delta (2\pi a/\lambda_a) T \sin \theta_0$. (По Когельнику [9.5].)

α , а толщина голограммы T . Измеряемая оптическая плотность голограммы практически равна плотности равномерно засвеченной фотопластинки толщиной T с коэффициентом поглощения α . Амплитудное пропускание такой пластинки можно определить как отношение амплитуды световой волны, прошедшей через пластинку в направлении нормали, к амплитуде волны, падающей на пластинку. Для однородной среды амплитуда волны (действительная) имеет вид $A \exp(-\alpha z)$ (см. § 4 настоящей главы), так что

$$t = \exp(-\alpha T).$$

Возводя в квадрат t , получаем пропускание по интенсивности

$$J = t^2 = \exp(-2\alpha T).$$

В соответствии с определением оптической плотности (см. гл. 2, § 5) имеем

$$D = -\lg J,$$

или

$$D = -\lg [\exp(-2\alpha T)]. \quad (9.95)$$

Положив $\alpha T / \cos \theta_0 = \ln 3$ (величина, при которой достигается максимальная дифракционная эффективность), получим

$$D = (2 \ln 3) \cos \theta_0 \lg e = 0,955 \cos \theta_0,$$

где e — основание натуральных логарифмов. Мы видим, что оптимальной для абсорбционной пропускающей голограммы является оптическая плотность, меньшая единицы. Эта величина мала по сравнению с оптической плотностью, используемой в обычной фотографии, однако согласуется с результатами экспериментов, которые показывают, что оптическая плотность хороших абсорбционных голограмм соответствует плотности недодержанных фотоснимков. На фиг. 9.7 проведена пунктирная кривая, соединяющая все точки, которым соответствует оптическая плотность $D = 0,955 \cos \theta_0$. Мы видим, что эта оптическая плотность является оптимальной для всех отношений α/α_1 .

На фиг. 9.8 изображена полученная с помощью (9.93) зависимость относительной эффективности η/η_0 от ξ для абсорбционной пропускающей голограммы. Обе кривые соответствуют $\alpha = \alpha_1$; по виду кривые аналогичны кривым на фиг. 9.6 для $\nu \leq \pi/2$. Вид кривых слабо зависит от параметра $\alpha_1 T / (2 \cos \theta_0)$.

§ 7. Отражательные голограммы

Отражательные голограммы с плоскостями пучностей, параллельными поверхности голограммы, образуются при интерференции двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях относительно оси z . Действительно, из уравнения (9.5)

$$2\pi (\eta_S - \eta_R) y + 2\pi (\zeta_S - \zeta_R) z = \text{const}$$

следует, что если $\eta_S = \eta_R$ и $\zeta_S = -\zeta_R$, то уравнение, описывающее плоскости пучностей, имеет в этом случае вид

$$2\pi (2\zeta_S) z = \text{const},$$

или

$$z = \text{const},$$

т. е. плоскости пучностей параллельны плоскости xy . Они расположены на расстоянии

$$d_2 = \frac{1}{2\zeta_S} = \frac{\lambda}{2(1 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}}.$$

Если отражательная голограмма освещается световой волной, падающей слева, то ее отклик характеризуется дифрагированной волной, распространяющейся справа налево (фиг. 9.9). Поэтому



ФИГ. 9.9.

Отражательная голограмма.

амплитуда дифрагированной волны при $z = T$ равна нулю. Если, как и прежде, положить амплитуду падающей волны равной единице, то граничные условия примут вид

$$R(0) = R_1 + R_2 = 1, \quad (9.96)$$

$$S(T) = S_1 \exp(\gamma_1 T) + S_2 \exp(\gamma_2 T) = 0. \quad (9.97)$$

Используя эти граничные условия в уравнениях связанных волн, найдем амплитуду $S(0)$ дифрагированной волны, идущей от голограммы, при $z = 0$. Мы можем сделать это, подставляя (9.96) и (9.97) в (9.63). Для $z = 0$ тогда получим

$$-i\kappa (R_1 + R_2) = -i\kappa = c_S (\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2) + (\alpha + i\Gamma) (S_1 + S_2). \quad (9.98)$$

Поскольку $S(0) = S_1 + S_2$, мы должны представить первый член в правой части (9.98) как функцию $S_1 + S_2$, после чего (9.98) даст искомое решение. После некоторых преобразований граничных условий (9.97) это удастся сделать. Прежде всего запишем (9.97) в виде

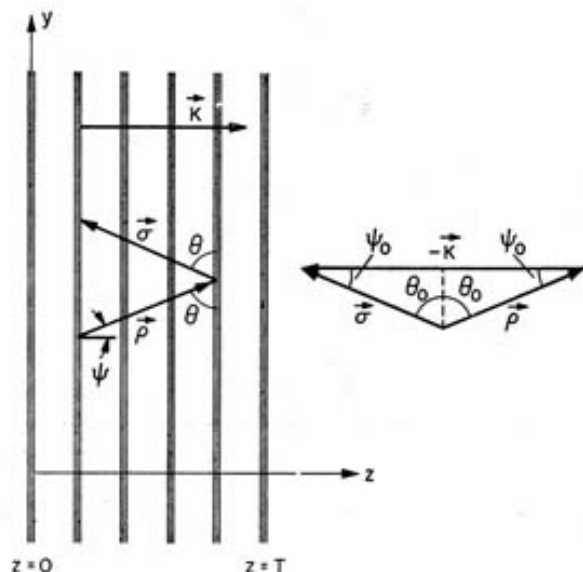
$$-S_1 \exp(\gamma_1 T) = S_2 \exp(\gamma_2 T). \quad (9.99)$$

Теперь к обоим частям равенства (9.99) прибавим $S_1 \exp(\gamma_2 T)$. Тогда получим

$$S_1 [\exp(\gamma_2 T) - \exp(\gamma_1 T)] = (S_1 + S_2) \exp(\gamma_2 T). \quad (9.100)$$

Затем умножим обе части (9.99) на -1 и прибавим к ним $S_2 \exp(\gamma_1 T)$; это дает

$$S_2 [-\exp(\gamma_2 T) + \exp(\gamma_1 T)] = (S_1 + S_2) \exp(\gamma_1 T). \quad (9.101)$$



ФИГ. 9.10.

Геометрическая схема отражательной голограммы с плоскостями пучностей, параллельными ее поверхности.

Тогда первый член в правой части равенства (9.98) принимает вид

$$c_S (\gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2) = c_S \frac{\gamma_1 (S_1 + S_2) \exp(\gamma_2 T) - \gamma_2 (S_1 + S_2) \exp(\gamma_1 T)}{\exp(\gamma_2 T) - \exp(\gamma_1 T)} \quad (9.102)$$

и

$$S(0) = S_1 + S_2 = -i\alpha \left(\alpha + i\Gamma + c_S \left[\frac{\gamma_1 \exp(\gamma_2 T) - \gamma_2 \exp(\gamma_1 T)}{\exp(\gamma_2 T) - \exp(\gamma_1 T)} \right] \right)^{-1}. \quad (9.103)$$

Вычислим теперь (9.103) при условии, что вектор решетки \vec{K} перпендикулярен поверхности голограммы, как это показано

на фиг. 9.10. Вектор $\vec{\rho}$ образует угол θ с плоскостями решетки, и векторная диаграмма, изображенная справа на фиг. 9.10, соответствует равенству (9.45) $\vec{\sigma} = \vec{\rho} - \vec{K}$ для падения под углом Брэгга. Если угол θ равен углу Брэгга θ_0 , то треугольник равнобедренный, и мы имеем

$$c_R = \frac{\rho_z}{\beta} = -c_S = -\frac{\sigma_z}{\beta} = \cos \psi_0, \quad (9.104)$$

где ψ_0 — показанный на фиг. 9.10 угол между $\vec{\rho}$ и осью z при падении света под углом Брэгга. В дальнейшем мы будем считать, что угол падения θ близок к θ_0 , так что равенство (9.104) выполняется достаточно точно.

1. Фазовые отражательные голограммы

Фазовые отражательные голограммы характеризуются значением $\alpha = \alpha_1 = 0$. В этом случае удобно ввести параметры

$$\xi_r = \frac{\Gamma T}{2 \cos \psi_0} = \frac{\beta T \delta \sin 2\theta_0}{2 \cos \psi_0} = \delta \beta T \cos \theta_0, \quad (9.105a)$$

$$v_r = \frac{\chi T}{\cos \psi_0} = \frac{\pi n_1 T}{\lambda_0 \cos \psi_0}. \quad (9.105b)$$

В (9.105a) было использовано определение (9.59) величины Γ и соотношение $\psi_0 = \pi/2 - \theta_0$. Чтобы выразить $S(0)$ через ξ_r и v_r , нужно подставить (9.104), (9.105a) и (9.105b) в выражение (9.67) для $\gamma_{1,2}$. Тогда получим

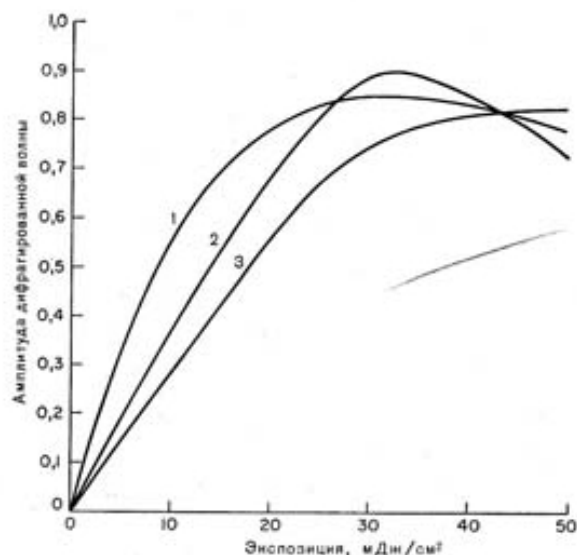
$$\gamma_{1,2} T = i\xi_r \pm (v_r^2 - \xi_r^2)^{1/2}. \quad (9.106)$$

Непосредственная, но довольно длительная процедура подстановки (9.105a), (9.105b) и (9.106) в (9.103) приводит к следующему выражению для амплитуды дифрагированной волны при $z = 0$:

$$S(0) = \frac{-i}{(i\xi_r/v_r) + [1 - (\xi_r/v_r)^2]^{1/2} \operatorname{cth}(v_r^2 - \xi_r^2)^{1/2}}. \quad (9.107)$$

Для падения под углом Брэгга $\xi_r = 0$ и дифракционная эффективность может достигать 100%, так же как и для диэлектрических пропускающих голограмм при отсутствии потерь. Однако в противоположность пропускающим голограммам, для которых η_0 достигает 100% при определенном значении произведения толщины на постоянную взаимодействия, в данном случае при увеличении v_r дифракционная эффективность асимптотически приближается к максимальной величине. Соответствующее различие кривых

иллюстрируется фиг. 9.11, на которой приведены экспериментальные зависимости дифракционной эффективности от экспозиции, полученные в работе [9.10] для хромированного желатина. На кривых 1 и 2, соответствующих пропускающим голограммам, имеется максимум эффективности, положение которого зависит от экспозиции (и, таким образом, от ν), в то время как эффективность отражательной голограммы (кривая 3) непрерывно возрастает по мере увеличения экспозиции.



ФИГ. 9.11.

Зависимость амплитуды дифрагированной волны от экспозиции для решеток в хромированном желатине. (По Лину [9.10].)

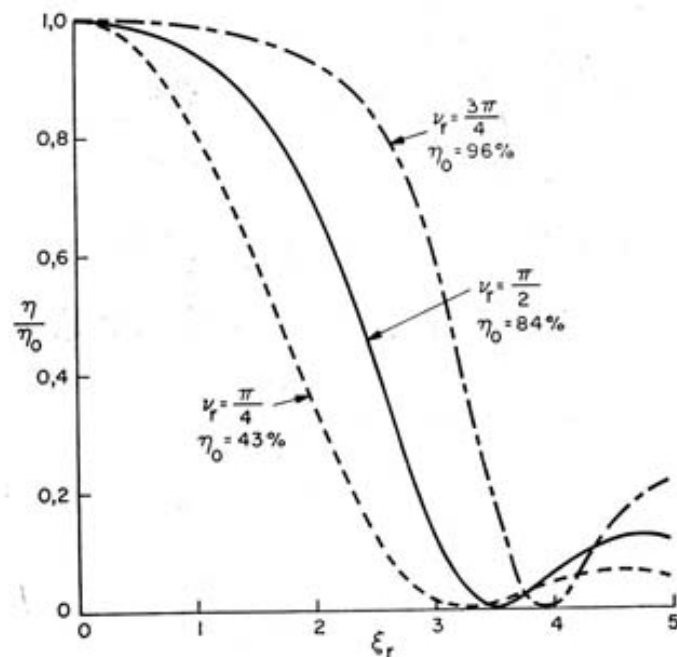
Кривые 1 и 2 соответствуют пропускающим решеткам; кривая 3—отражательной решетке.

На фиг. 9.12 относительная эффективность η/η_0 представлена как функция ξ_r для трех значений параметра ν_r , а именно: $\nu_r = \pi/4$, $\pi/2$ и $3\pi/4$; для этих кривых значения η_0 составляют соответственно 43, 84 и 96%. Заметим, что по мере увеличения ν_r происходит значительное уширение максимума зависимости эффективности отражательной голограммы от угла падения. Рассмотрим кривую для $\nu_r = \pi/2$ и оценим селективность отражательной голограммы по отношению к длине волны. Из (9.84) (считая δ

отрицательным) и (9.105а) имеем

$$\begin{aligned} \xi_r &= -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_a} \beta T \operatorname{tg} \theta_0 \cos \theta_0 = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_a} \beta T \sin \theta_0 = \\ &= -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_a} \left(\frac{2\pi\bar{n}}{\lambda_a} \right) T \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (9.108)$$

В соответствии с кривой для $\nu_r = \pi/2$ на фиг. 9.12, $\eta/\eta_0 = 0$, когда $\xi_{r0} = 3,5$. Положив $\lambda = 0,488$ мкм, $T = 15$ мкм, $\bar{n} = 1,52$ и $\theta_0 =$



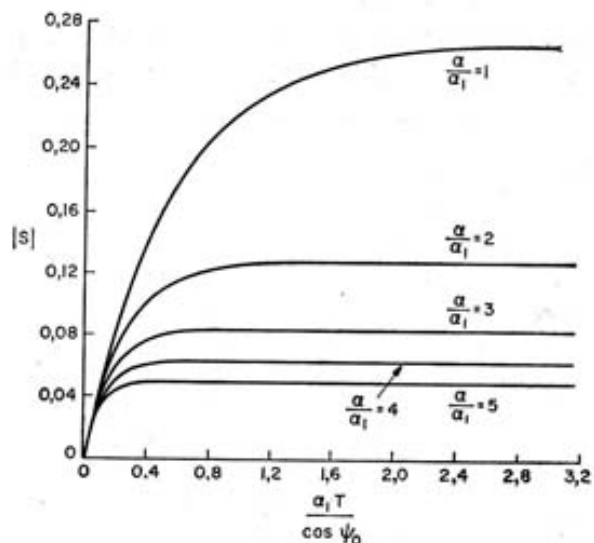
ФИГ. 9.12.

Зависимость относительной эффективности η/η_0 диэлектрической отражательной голограммы без потерь от $\xi_r = \delta (2\pi\bar{n}/\lambda_a) T \cos \theta_0$ для разных значений параметра $\nu_r = \pi n_1 T / \lambda_a \cos \psi_0$. (По Когельнику [9.5].)

$= 80^\circ$ (в желатине) и найдя $\Delta\lambda$ из (9.108), получим $|\Delta\lambda| = 0,0059$ мкм $= 59 \text{ \AA}$. Благодаря такой высокой спектральной селективности отражательных голограмм для их освещения можно использовать источники белого света (см. гл. 17).

2. Абсорбционные отражательные голограммы

Здесь, так же как и в § 6, п. 2 настоящей главы, $\epsilon_1 = 0$, тогда как α и α_1 имеют конечные значения, а постоянная $\kappa = -i\alpha_1/2$.



ФИГ. 9.13.

Зависимость абсолютной величины амплитуды дифрагированной волны от $\alpha_1 T / \cos \psi_0$ для абсорбционной отражательной голограммы при различных значениях параметра α/α_1 . (По Когельнику [9.5].)

Определим параметры v_{ra} и ξ_{ra} следующим образом:

$$v_{ra} = \frac{\alpha_1 T}{2 \cos \psi_0}, \quad (9.109a)$$

$$\xi_{ra} = \frac{\alpha T}{\cos \psi_0} + \frac{i\Gamma T}{2 \cos \psi_0}. \quad (9.109b)$$

Тогда, выражая $\gamma_{1,2} T$ в (9.67) через v_{ra} и ξ_{ra} , получаем

$$\gamma_{1,2} T = \frac{i\Gamma T}{2 \cos \psi_0} \pm (\xi_{ra}^2 - v_{ra}^2)^{1/2}. \quad (9.110)$$

Здесь использовано условие (9.104), выполняющееся для отражательной голограммы:

$$c_R = -c_S = \cos \psi_0. \quad (9.103)$$

Если подставить $\gamma_{1,2} T$ в выражение для $S(0)$, то для амплитуды дифрагированной волны, исходящей из голограммы, получим

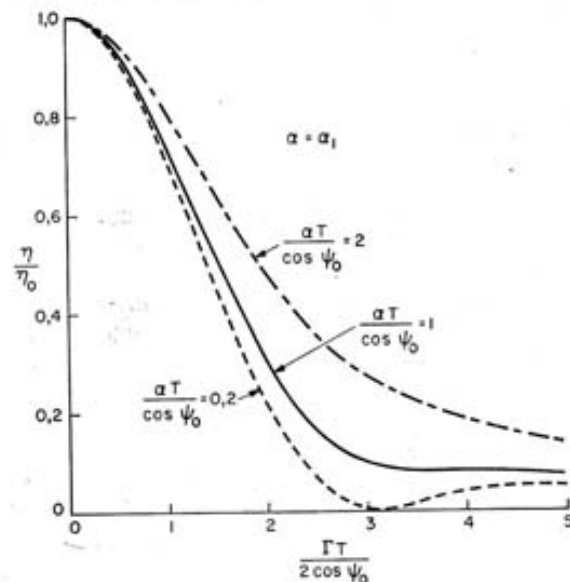
$$S(0) = - \left\{ \frac{\xi_{ra}}{v_{ra}} + \left[\left(\frac{\xi_{ra}}{v_{ra}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \operatorname{cth} (\xi_{ra}^2 - v_{ra}^2)^{1/2} \right\}^{-1}. \quad (9.111)$$

При падении под углом Брэгга $\Gamma = 0$ и

$$\frac{\xi_{ra}}{v_{ra}} = \frac{2\alpha}{\alpha_1},$$

и выражение для $S(0)$ принимает вид

$$S(0) = - \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha_1} + \left(\frac{4\alpha^2}{\alpha_1^2} - 1 \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left[\frac{T}{\cos \psi_0} \left(\alpha^2 - \frac{\alpha_1^2}{4} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1}. \quad (9.112)$$



ФИГ. 9.14.

Зависимость относительной эффективности η/η_0 для абсорбционной отражательной голограммы от $\Gamma T / 2 \cos \psi_0$ при различных значениях параметра $\alpha T / \cos \psi_0$ и $\alpha_1 = \alpha$. (По Когельнику [9.5].)

Оптимальная величина $|S(0)|$ достигается, когда α_1 принимает максимальное значение $\alpha_1 = \alpha$. Тогда

$$|S(0)| = \left[2 + \sqrt{3} \operatorname{cth} \left(\frac{T}{\cos \psi_0} \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} \right) \right]^{-1}.$$

Если $\alpha_1 = \alpha \rightarrow \infty$, то достигается максимальная эффективность $\eta_{\text{макс}} = |S(0)|^2 \rightarrow (2 + \sqrt{3})^{-2} = 7,2\%$. Это отражает тот экспериментально установленный факт, что дифракционная эффективность отражательных абсорбционных голограмм достигает максимальной величины, когда фотопластинка совсем темная. На фиг. 9.13 изображены кривые зависимости $|S(0)|$ от $\alpha_1 T / \cos \psi_0$ для нескольких значений α/α_1 . Мы видим, что при $\alpha_1 T / \cos \psi_0 = 2$ амплитуда дифрагированной волны достаточно близка к своему асимптотическому максимальному значению. В соответствии с (9.95) оптическая плотность пластинки при этом равна 1,7. Эта величина представляет собой минимальную оптическую плотность, которую нужно получить (путем соответствующего выбора экспозиции), чтобы достичь близкой к максимальной дифракционной эффективности.

На фиг. 9.14 приведена зависимость относительной эффективности от $\Gamma T / 2 \cos \psi_0$ для $\alpha = \alpha_1$ и разных значений $\alpha T / \cos \psi_0$.

§ 8. Обсуждение свойств объемных голограмм

В табл. 9.1 сравниваются теоретические и наблюдаемые максимальные значения дифракционной эффективности для плоских и объемных голограмм при условиях, рассмотренных в настоящей главе. Максимальные теоретические значения дифракционной эффективности близки к наблюдаемым; исключение составляют только абсорбционные отражательные голограммы. Поскольку часть предсказанных значений получена с помощью теории, изложенной в настоящей главе, а часть — с помощью результатов анализа плоских голограмм, проведенного в гл. 8, необходимо установить, какой толщиной должна обладать голограмма, чтобы ее можно было считать объемной. Клейн [9.12] определил нижний предел толщины объемных голограмм через параметр

$$Q = \frac{2\pi\lambda_a T}{\bar{n}d^2}. \quad (9.113)$$

Теория связанных волн начинает давать хорошие результаты при $Q \geq 10$ [9.5]. Рассмотрим типичный случай: $T = 15$ мкм, $\lambda_a = 0,633$ мкм, $\bar{n} = 1,52$ (для желатина). Положив $Q = 10$, найдем, что расстояние между интерференционными плоскостями равно $d = 1,98$ мкм. Подставляя это значение и величину $\lambda = \lambda_a/\bar{n} = 0,416$ мкм в (1.10) ($2d \sin \theta = \lambda$), находим минимальный угол между пучками $2\theta \approx 12^\circ$, необходимый для получения объемной голограммы в слое желатина толщиной 15 мкм. Как отмечалось в § 1, если в (1.10) подставить $\lambda = \lambda_a$, то мы получим угол между пучками в воздухе. Таким образом, угол 2θ между пучками в воз-

Таблица 9.1

Максимальная дифракционная эффективность голограмм разных типов

Толщина регистрирующей среды	Тонкая		Толстая			
	Пропускающие		Пропускающие	Отражательные		
Вид голограмм	Амплитуда	Фаза	Коэфф. поглощения	Показатель преломления	Коэфф. поглощения	Показатель преломления
Максимальная теоретическая эффективность, %	6,25	33,9	3,7	100	7,2	100
Максимальная эффективность, достигнутая экспериментально, %	6,0	32,6	3,0	90	3,8	80
Литература	[11.28]	[9.8]	[9.9]	[9.10]	[9.11]	[9.10]

духе, необходимый для получения объемной голограммы с помощью излучения гелий-неонового лазера в фотографической эмульсии толщиной 15 мкм, составляет $18,4^\circ$.

Голограмма, полученная при таком минимальном угле между пучками, обладает заметной селективностью к углу падения освещающего пучка. Для фазовой голограммы значение δ_0 в среде, согласно (9.86) и (9.87), составляет

$$\delta_0 \approx \frac{\lambda_a}{2\bar{n}T \sin \theta_0} = \frac{d}{T} \approx 0,13 \text{ рад} \approx 7,5^\circ.$$

Однако такие голограммы почти не обладают спектральной селективностью. Для использованных выше параметров и $\theta_0 = 6^\circ$

$$\Delta\lambda_0 \approx \frac{d \operatorname{ctg} \theta_0}{T} \lambda_a \approx 8000 \text{ \AA}.$$

Дифракционная эффективность таких голограмм превышает 50% для всего видимого спектра [9.13].

С ростом θ_0 селективность голограммы по отношению к углу падения возрастает. Например, если $\theta_0 = 30^\circ$, в то время как T , \bar{n} и λ_n имеют прежние значения, то $\delta_0 \approx 1,6^\circ$ в среде. При такой большой угловой селективности на одной фотопластинке можно получать большое число голограмм, причем наблюдатель будет видеть одновременно только одно изображение. Все голограммы могут быть получены с предметным пучком, имеющим одинаковую среднюю пространственную частоту, тогда как направления опорных пучков должны отличаться по крайней мере на δ_0 . Если проявленную фотопластинку осветить одним из исходных опорных пучков (удовлетворяющим условию Брэгга лишь для одной из зарегистрированных на пластинке голограмм), то восстановится только предметная волна, соответствующая данному опорному пучку (см. гл. 16).

Другой метод, позволяющий зарегистрировать на одной фотопластинке много предметных волн и затем восстанавливать их поочередно, состоит в том, что каждый предметный пучок интерферирует с одним и тем же опорным пучком, однако фотопластинка в этом случае после каждой экспозиции поворачивается на угол δ_0 .

В соответствии с (9.88) при увеличении угла Брэгга θ_0 возрастает спектральная селективность голограммы ($\Delta\lambda_0 \approx 300 \text{ \AA}$ при $\theta_0 = 30^\circ$ в среде), что позволяет получать многоцветные голограммы [9.14], которые восстанавливают цветные изображения без переналожения изображений разных цветов (см. гл. 17). Когда угол между пучками увеличивается настолько, чтобы образовалась отражательная голограмма, селективность по отношению к длине волны описывается выражением (9.108). Отражательные голограммы обладают настолько высокой селективностью к длине волны, что их можно восстанавливать в белом свете [9.15, 9.18*]. Отражательные голограммы могут восстанавливать многоцветные изображения при освещении белым светом [9.16]. Однако при увеличении θ_0 из-за наличия множителя $\cos \theta_0$ в (9.105а) падает селективность таких голограмм по отношению к углу падения восстанавливающего пучка.

Когельник [9.5], анализ которого был использован в настоящей главе, рассмотрел также случай пучка, поляризованного в плоскости падения. Он нашел, что все ранее изложенные результаты остаются справедливыми, если сделать только одно видоизменение, а именно умножить константу взаимодействия κ на косинус угла (в среде) между падающим и дифрагированным пучками. При приближении этого угла к 90° амплитуда дифрагированной волны стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- 9.1. LEITH E. N., KOZMA A., UPATNIEKS J., MARKS J., MASSEY N., Appl. Opt., 5, 1303 (1966).
Голографическая запись информации в трехмерной среде.
- 9.2. BURCKHARDT C. B., Journ. Opt. Soc. Amer., 56, 1502 (1966).
Дифракция плоской волны на синусоидальной слоистой диэлектрической решетке.
- 9.3. BURCKHARDT C. B., Journ. Opt. Soc. Amer., 57, 601 (1967).
Эффективность диэлектрической решетки.
- 9.4. KOGELNIK H., Proc. Symp. Modern Opt., ed. J. Fox, New York, 1967, p. 605.
Отклик при восстановлении и эффективность голографических решеток.
- 9.5. KOGELNIK H., Bell. Syst. Tech. Journ., 48, 2909 (1969).
Теория взаимодействия для толстых голографических решеток.
- 9.6. GABOR D., STROKE G. W., Proc. Roy. Soc., A304, 275 (1968).
Теория объемных голограмм.
- 9.7. RAMO S., WHINNERY J. R., Fields and Waves in Modern Radio, 2nd ed., New York, 1960.
- 9.8. SHANKOFF T. A., Appl. Opt., 7, 2101 (1968).
Фазовые голограммы в хромированном желатине.
- 9.9. GEORGE N., MATTHEWS J. W., Appl. Phys. Lett., 9, 212 (1966).
Голографические дифракционные решетки.
- 9.10. LIN L. H., Appl. Opt., 8, 963 (1969).
Получение голограмм в слоях затвердевшего хромированного желатина.
- 9.11. LIN L. H., LoBIANCO C. V., Appl. Opt., 6, 1255 (1967).
Экспериментальная техника получения многоцветных голограмм, восстанавливаемых в белом свете.
- 9.12. KLEIN W. R., Proc. IEEE, 54, 803 (1966).
Теоретическая эффективность схем Брэгга.
- 9.13. SHANKOFF T. A., CURRAN R. K., Appl. Phys. Lett., 13, 239 (1968).
Эффективные высокоразрешающие фазовые дифракционные решетки.
- 9.14. PENNINGTON K. S., LIN L. H., Appl. Phys. Lett., 7, 56 (1965).
Восстановление многоцветного волнового фронта.
- 9.15. STROKE G. W., LABEYRIE A. E., Phys. Lett., 20, 368 (1966).
Восстановление в белом свете голографических изображений при использовании дифракционного эффекта Липмана — Брэгга.
- 9.16. LIN L. H., PENNINGTON K. S., STROKE G. W., LABEYRIE A. E., Bell Syst. Tech. Journ., 45, 659 (1966).
Восстановление многоцветных голографических изображений при освещении источником белого света.
- 9.17*. БРОНШТЕЙН И. Н., СЕМЕНДЯЕВ К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, изд. 9-е, М., 1962.
- 9.18*. ДЕНИСЮК Ю. Н., Оптика и спектроскопия, 15, 522 (1963).
Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения.